

Proportions

proportion et pourcentage

%

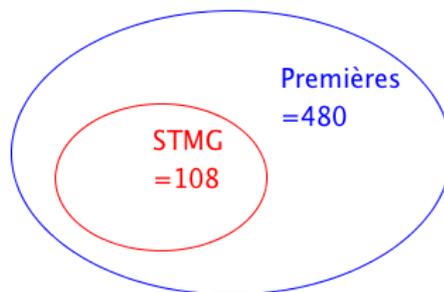
1) Proportion et pourcentage

1. Proportion d'une sous population

Définition : la proportion en pourcentage d'une sous-population, notée n , par rapport à une population, notée N , est le nombre égal à : $\frac{n}{N} \times 100$.

Exemple :

Sur les 480 élèves inscrits en classe de 1^{ère}, 108 d'entre eux ont choisi la filière STMG.



La **population totale** des élèves de 1^{ère}, notée N , est égale à 480 .

C'est la population **de référence**.

La **sous-population** des élèves de STMG, notée n , est égale à 108 .

La **proportion** d'élèves de STMG parmi tous les élèves de première, notée p , est :

$$p = \frac{n}{N} = \frac{108}{480} = \frac{9}{40} = 0,225.$$

Cette proportion peut s'exprimer en **pourcentage** : $p = 22,5 \%$.

2. Pourcentage d'un nombre

Propriété : Prendre $x\%$ d'une grandeur revient à multiplier cette grandeur

par $\frac{x}{100}$.

Exemple :

Parmi les 480 élèves de 1^{ère}, 15 % ont choisi la filière L.

15 % de 480 ont choisi la filière L, soit :

$$15\% \times 480 = \frac{15}{100} \times 480 = 0,15 \times 480 = 72 \text{ élèves.}$$

Exercice : Un récipient contient un volume total V . Sachant que 1,5 litre représente 25 % de V . Calculer V .

$$25\% \text{ de } V \text{ est égal à } 1,5 \text{ donc : } \frac{25}{100} \times V = 1,5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \times V = 1,5 \Leftrightarrow V = 1,5 \times 4$$

$$\Leftrightarrow V = 6 \text{ L}$$

Méthode : Associer proportion et pourcentage

Une société de 75 employés compte 12 % de cadres et le reste d'ouvriers. 35 employés de cette société sont des femmes et 5 d'entre elles sont cadres.

- Calculer l'effectif des cadres.
- Calculer la proportion de femmes dans cette société.
- Calculer la proportion, en %, de cadres parmi les femmes. Les femmes cadres sont-elles sous ou surreprésentées dans cette société ?

Solution :

a) 12 % de 75 = $\frac{12}{100} \times 75 = 9$. Cette société compte 9 cadres.

b) $n = 35$ femmes et $N = 75$ employés La proportion de femmes est donc égale à

$$p = \frac{35}{75} = \frac{7}{15} \approx 0,47.$$

c) $n = 5$ femmes cadres et $N = 35$ femmes.

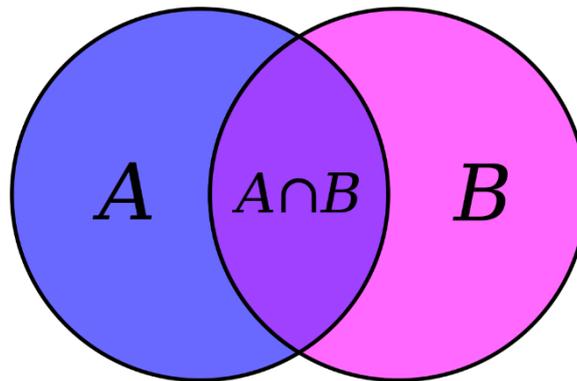
La population de référence n'est plus la même.

La proportion de cadres parmi les femmes est égale à $p = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \approx 0,14 = 14\%$.

14 % > 12 % donc les femmes cadres sont surreprésentées dans cette société.

Proportions

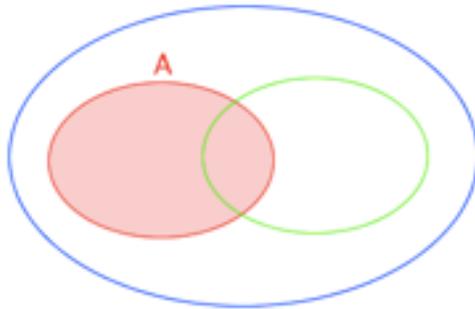
union et intersection de sous-
populations



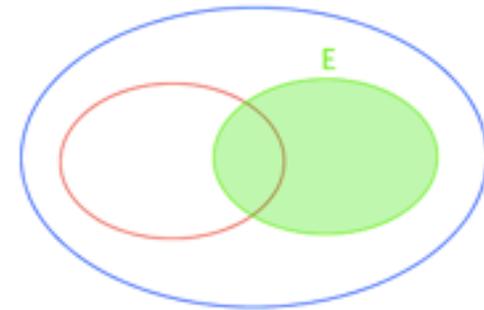
2) Union et intersection de sous-populations

Exemple :

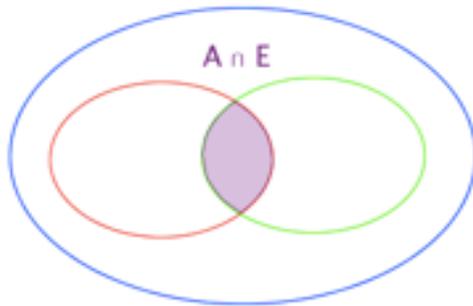
Dans une classe de 35 élèves, 14 élèves étudient l'anglais, 12 élèves étudient l'espagnol et 5 élèves étudient les deux.



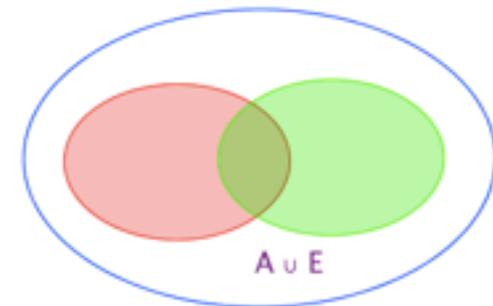
Effectif de l'anglais $n_A = \underline{\underline{14}}$



Effectif de l'espagnol $n_E = \underline{\underline{12}}$



$n_{A \cap E} = \underline{\underline{5}}$ étudient l'anglais et l'espagnol



$n_{A \cup E}$ étudient **l'anglais ou l'espagnol**

L'ensemble $A \cup E$ contient les élèves qui étudient l'anglais, ceux qui étudient l'espagnol et ceux qui étudient les deux.

Ainsi, en effectuant $14 + 12$, on compte deux fois ceux qui étudient les deux langues.

Et donc, $n_{A \cup E} = 14 + 12 - 5 = 21$. 21 élèves étudient l'anglais ou l'espagnol.

En terme de proportion, on a :

Proportion des élèves qui étudient l'anglais : $p_A = \frac{n_A}{N} = \frac{14}{35} = 0,4 = 40\%$

Proportion des élèves qui étudient l'espagnol : $p_E = \frac{n_E}{N} = \frac{12}{35} = 0,343 = 34,3\%$

Proportion des élèves qui étudient les deux : $p_{A \cap E} = \frac{n_{A \cap E}}{N} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \approx 0,143 = 14,3\%$

Proportion des élèves qui étudient l'anglais ou l'espagnol :

$$p_{A \cup E} = p_A + p_E - p_{A \cap E} \approx 40\% + 34,3\% - 14,3\% = 60\%$$

Propriété : Soit A et B deux sous-populations d'une même population.

La proportion de $A \cup B$ est donnée par : $p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$

Remarque : Si A et B n'ont pas d'élément en commun, alors l'ensemble $A \cap B$ est

vide et dans ce cas : $p_{A \cup B} = p_A + p_B$

Méthode : Calculer la proportion d'une union ou d'une intersection

Un glacier vend 24 % de ses glaces au parfum chocolat, 14 % au parfum vanille et 10 % des ventes sont aux deux parfums à la fois.

- Calculer la proportion de ventes de glaces au chocolat ou à la vanille.
- En déduire la proportion de glaces vendues à aucun des deux parfums, chocolat ou vanille.

Solution :

$$a) p_C = 24\%, p_V = 14\% \text{ et } p_{C \cap V} = 10\%.$$

$$\text{On déduit que } p_{C \cup V} = 24\% + 14\% - 10\% = 28\%.$$

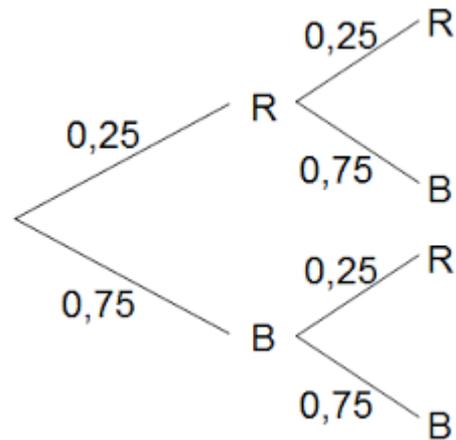
La proportion de glaces au chocolat ou à la vanille est égale à 28 %

b) La proportion de glaces ni au chocolat, ni à la vanille est égale à :

$$100\% - 28\% = 72\%$$

Proportions

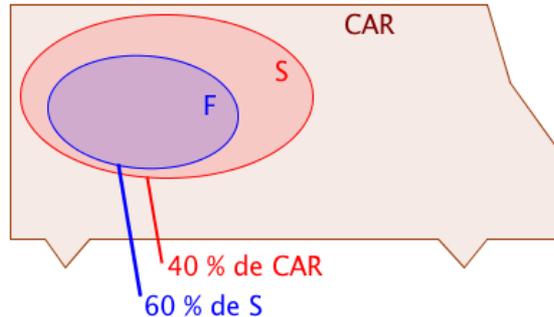
proportions échelonnées



3) Proportions échelonnées

1. Inclusion

Exemple : Dans un car, il y a 40 % de scolaires. Et parmi les scolaires, 60 % sont des filles.



L'ensemble F des filles est inclus dans l'ensemble S des scolaires et on a : $p_F = 60\%$ de S .

L'ensemble S est inclus dans l'ensemble CAR et on a : $p_S = 40\%$ de CAR .

La proportion de filles dans le CAR est donc égale à :

$$\underline{60\% \text{ de } 40\% = 60\% \times 40\% = 0,6 \times 0,4 = 0,24 = 24\% .}$$

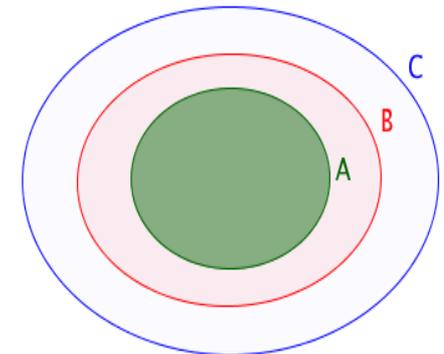
Propriété :

$A \subset B$ et $B \subset C$.

p_1 est la proportion de A dans B .

p_2 est la proportion de B dans C .

Alors $p = \dots p_1 \times p_2 \dots$ est la proportion de A dans C .



Méthode : Calculer une proportion échelonnée

Sur 67 millions d'habitants en France, 66 % de la population est en âge de travailler (15-64 ans).

La population active représente 70 % de la population en âge de travailler.

- Calculer la proportion de population active par rapport à la population totale.
- Combien de français compte la population active ?

Solution :

a) F est la population française.

T est la population en âge de travailler.

A est la population active.

La proportion de A dans T est 70 %.

La proportion de T dans F est 66 %.

La proportion de A dans F est donc égale à :

$70 \% \times 66 \% = 0,7 \times 0,66 = 0,462 = 46,2 \%$. 46,2 % des français sont actifs.

$46,2 \% \text{ de } 67 = 0,462 \times 67 = 30,954$.

La France compte environ 31 millions d'actifs.

2. Tableaux

Méthode : Représenter une situation par un tableau

Dans une entreprise qui compte 360 employés, on compte 60 % d'hommes et parmi ceux-là, 12,5 % sont des cadres. Par ailleurs, 87,5 % des femmes de cette entreprise sont ouvrières ou techniciennes.

a) Compléter le tableau.

| | Cadres | Ouvriers, techniciens | Total |
|--------|--------|--------------------------|-------|
| Hommes | | | |
| Femmes | | | |
| Total | | | |

b) À l'aide de ce tableau, déterminer :

- la proportion de cadres,
- la proportion d'hommes cadres
- la proportion d'employés hommes ou cadres.
- la proportion d'hommes dans les cadres.

Solution :

| | Cadres | Ouvriers, techniciens | Total |
|--------|--------------------------|---------------------------|-------------------------|
| Hommes | $12,5\% \times 216 = 27$ | $216 - 27 = 189$ | $60\% \times 360 = 216$ |
| Femmes | $144 - 126 = 18$ | $87,5\% \times 144 = 126$ | $360 - 216 = 144$ |
| Total | $27 + 18 = 45$ | $189 + 126 = 315$ | 360 |

b) - Proportion de cadres : $p_c = \frac{45}{360} = 0,125 = 12,5\%$

- Proportion d'hommes cadres : $p_{H \cap C} = \frac{27}{360} = 0,075 = 7,5\%$

- Proportion d'employés hommes ou cadres :

$$p_H + p_C - p_{H \cap C} = 60\% + 12,5\% - 7,5\% = 65\%$$

- Proportion d'hommes dans les cadres : $\frac{27}{45} = 0,6 = 60\%$.

3. Arbres

Méthode : Représenter une situation par un arbre

Deux fabricants de calculatrices se partagent le marché.

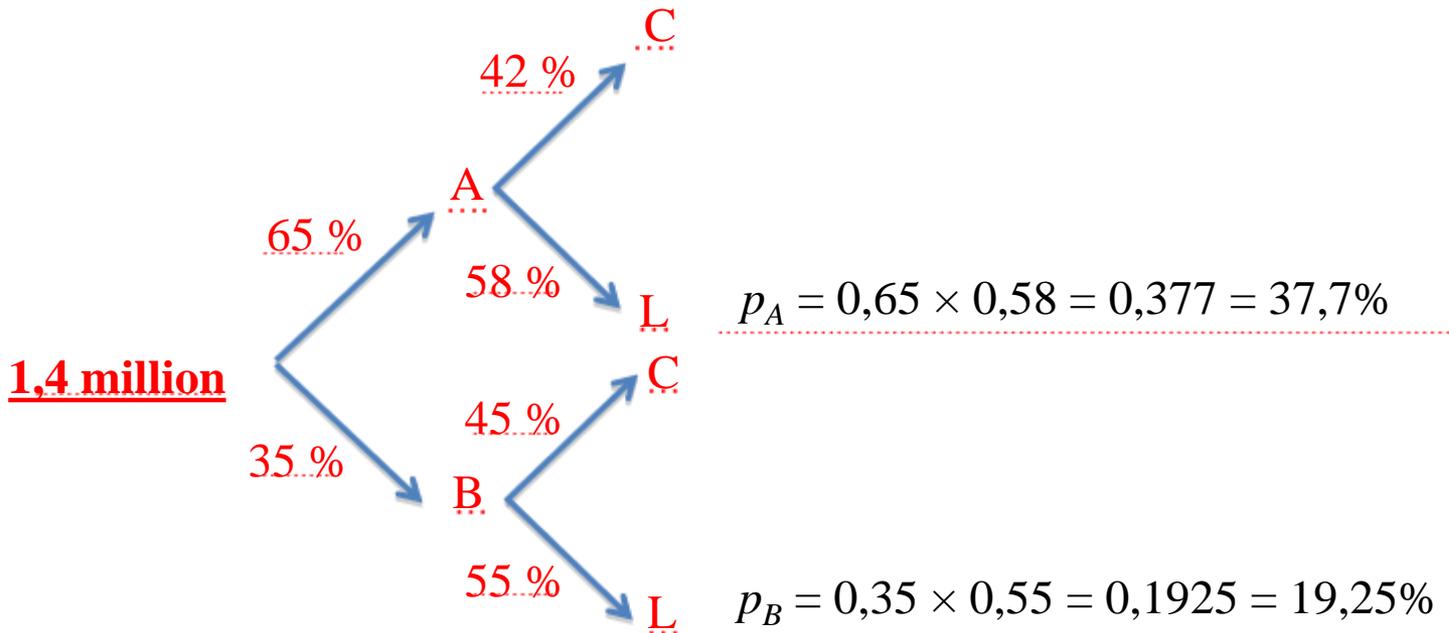
65 % des calculatrices proviennent du fabricant A.

Pour le fabricant A, 42 % des calculatrices vendues sont des modèles pour le collège.

Pour le fabricant B, 55 % des calculatrices vendues sont des modèles pour le lycée.

a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Cette année, le marché représentait 1,4 million de calculatrices. Déterminer le nombre de modèles vendus pour le lycée.



b) Pour le fabricant A :

Proportion de modèles vendus pour le lycée : $p_A = 37,7\%$

Nombre de modèles vendus pour le lycée : $37,7\% \times 1\,400\,000 = 527\,800$

Pour le fabricant B :

Proportion de modèles vendus pour le lycée : $p_B = 19,25\%$

Nombre de modèles vendus pour le lycée : $19,25\% \times 1\,400\,000 = 269\,500$

Nombre total de modèles vendus pour le lycée : $527\,800 + 269\,500 = 797\,300$.