Polynôme du 2nd degré

définitions et premières propriétés

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

1) Définitions et premières propriétés

1. Définition

Définition : On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou trinôme du second degré) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(où les coefficients a, b et c sont des réels et a 0)

On note souvent ses fonctions par des lettres P, Q ou R.

Exemples et contre-exemples :

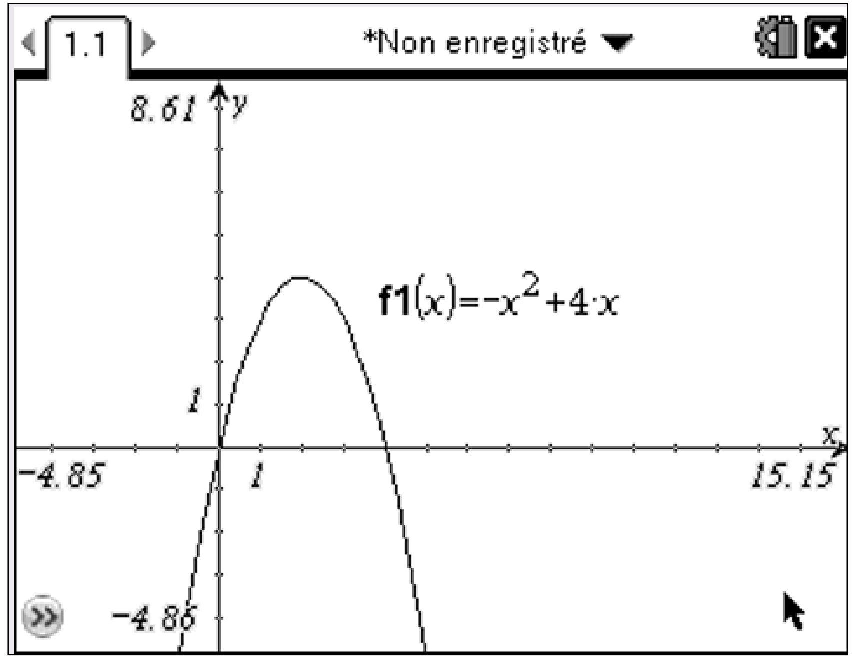
Les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) f, g, h et k suivantes **:**

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$
- $g(x) = x^2 - 5x + 4$
- $h(x) = 4 - 2x^2$
- $k(x) = (x - 4)(5 - 2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

Mais les fonctions m et n suivantes n'en sont pas !

- $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x) = 5x^4 - 3x^3 + 6x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

2. Représentation graphique et variations



Exemple

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 dans un repère orthogonal est une ……**parabole**…… dont le sommet est le point S a pour coordonnées : $S\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

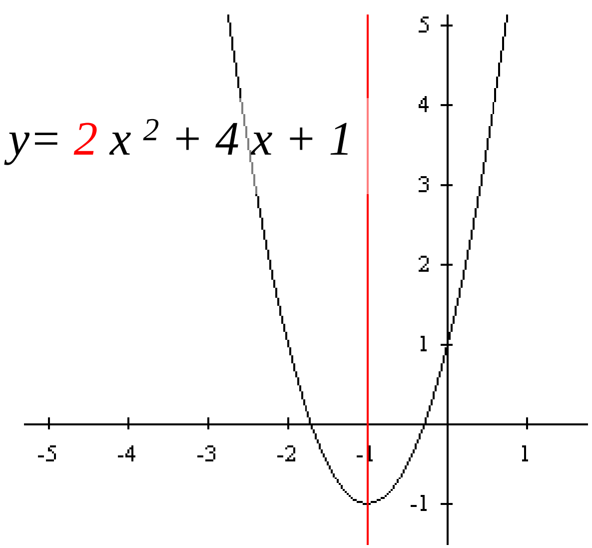
Propriétés :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $a < 0$, f est **d’abord décroissante, puis croissante** : « *colline* ».
- Si $a > 0$, f est **d’abord croissante, puis décroissante** : « *cuvette* ».

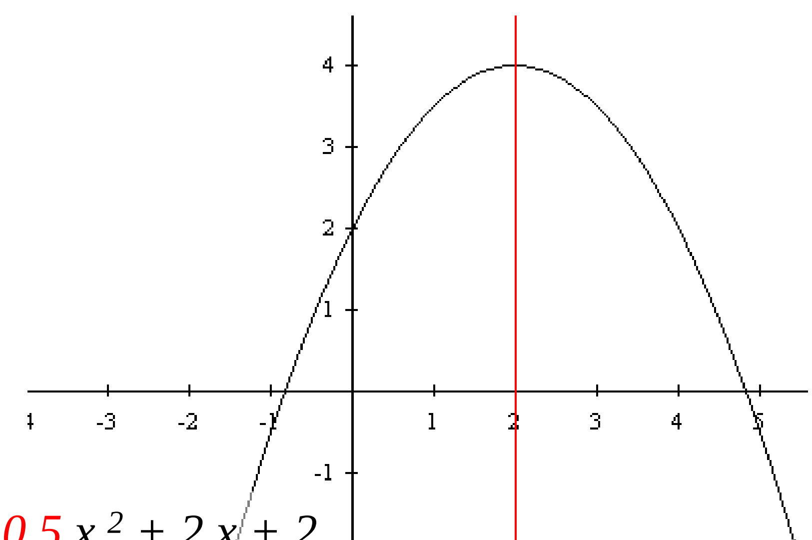
$\underline{a > 0}$

$y = 2x^2 + 4x + 1$



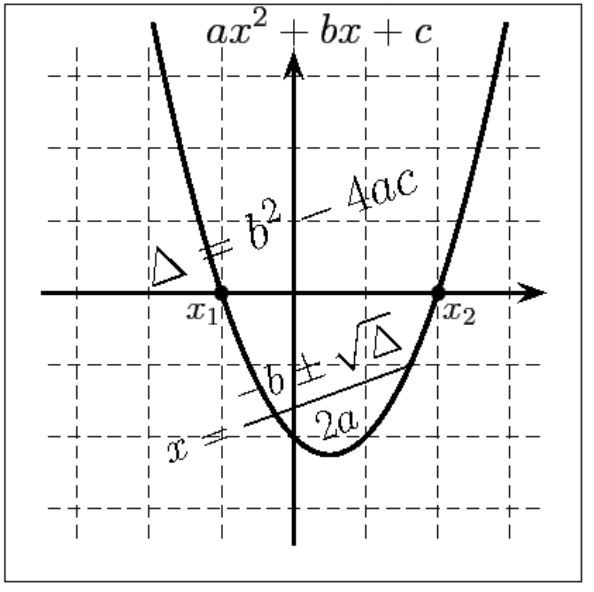
$\underline{a < 0}$

$y = -0{,}5x^2 + 2x + 2$



Polynôme du 2nd degré

résolution d'une équation du 2nd degré



2) Résolution d'une équation du 2^{nd} degré

1) Définitions

Définitions :

1) Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $a x^2 + b x + c = 0$ ……

(où les coefficients a, b et c sont des réels et $a \neq 0$)

2) **Résoudre** cette équation dans $\mathbb{R}$, c'est trouver tous les réels qui vérifient

$$a x^2 + b x + c = 0$$

Ces solutions sont appelées **racines du trinôme P** …… .

Exemple : L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $a x^2 + b x + c$, **le nombre réel, noté Δ (delta), égal à $b^2 - 4ac$** …… Il joue un rôle prépondérant par la suite.

Exemple : Le discriminant de l'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est : ……

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 36 + 24 = 60$. En effet, $a = 3$, $b = -6$ et $c = -2$.

2) Résolution d'une équation

Propriété : soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta < 0$	L'équation n'a **pas de solution** dans $\mathbb{R}$.
Si $\Delta = 0$	L'équation a **une unique solution** dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$
Si $\Delta > 0$	L'équation a **deux solutions distinctes** dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Résoudre les équations suivantes :

a) $6x^2 - x - 1 = 0$ b) $x^2 - 3x + 4 = 0$ c) $2x^2 - 12x + 18 = 0$

Solution : *a)* $6x^2 - x - 1 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $6x^2 - x - 1 = 0$

$a = 6$, $b = -1$ **et** $c = -1$

donc $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1)$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 6} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 6} = \frac{1}{2}$$

b) $x^2 - 3x + 4 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$:

a = 1, b = -3 et c = 4

donc $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4$

$\Delta = 9 - 16 = -7$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle.

c) $2x^2 - 12x + 18 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$

a = 2, b = -12 et c = 18

donc $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18$

$\Delta = 144 - 144 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution réelle

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$$