Chapitre A-A3 : 2nd degré (partie 2)

1) Résolution d'une équation du second degré

1) Définitions

Définitions :
1) Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme
$a x^2 + b x + c = 0$ (où les coefficients a, b et c sont des réels et $a \neq 0$)
2) **Résoudre** cette équation dans ℝ, c'est trouver tous les réels qui vérifient $a x^2 + b x + c = 0$
Ces solutions sont appelées ***racines du trinôme P***.

Exemple : L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ (delta), égal à $b^2 - 4ac$.
Il joue un rôle prépondérant par la suite.

Exemple : Le discriminant de l'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est :
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 36 + 24 = 60$. En effet, $a = 3$, $b = -6$ et $c = -2$.

2) Résolution d'une équation

Propriété : soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta < 0$	L'équation n'a **pas de solution** dans ℝ.
Si $\Delta = 0$	L'équation a **une unique solution** dans ℝ : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
Si $\Delta > 0$	L'équation a **deux solutions distinctes** dans ℝ : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Méthode : Résoudre une équation du second degré
Résoudre les équations suivantes :

a) $6x^2 - x - 1 = 0$ b) $x^2 - 3x + 4 = 0$ c) $2x^2 - 12x + 18 = 0$

Solution :

$6x^2 - x - 1 = 0$	$x^2 - 3x + 4 = 0$	$2x^2 - 12x + 18 = 0$
Calculons le discriminant de l'équation $6x^2 - x - 1 = 0$: $a = 6$, $b = -1$ et $c = -1$ donc $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1)$ $\Delta = 1 + 24 = 25$ Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 6} = -\dfrac{1}{3}$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 6} = \dfrac{1}{2}$	Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$: $a = 1$, $b = -3$ et $c = 4$ donc $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4$ $\Delta = 9 - 16 = -7$ Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle.	Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ $a = 2$, $b = -12$ et $c = 18$ donc $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18$ $\Delta = 144 - 144 = 0$ Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution réelle. $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-12)}{2 \times 2} = 3$

2) Factorisation d'un trinôme

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Admise -

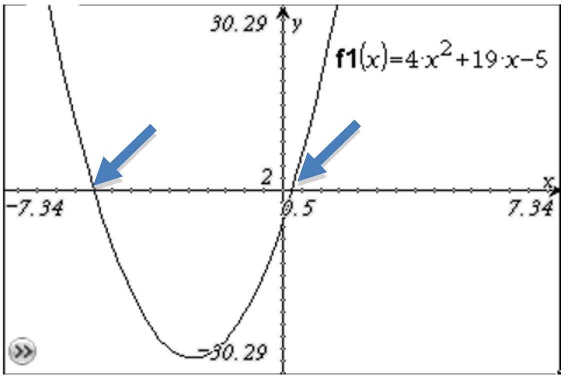
Remarque : Si $\Delta < 0$, on n'a pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

Solution :

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:



Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4} = -5$

et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4} = \frac{1}{4}$

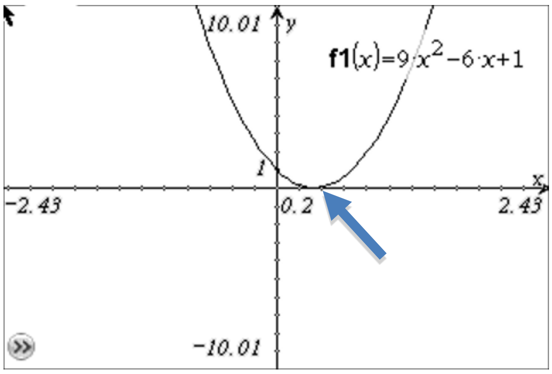
On a donc :

$4x^2 + 19x - 5 = 4\,(x - (-5))(x - \frac{1}{4})$

$= (x + 5)(4x - 1)$

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile ! On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:



Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

La racine (double) est : $x_0 = -\frac{-6}{2\times9} = \frac{1}{3}$

On a donc :

$9x^2 - 6x + 1 = 9\,(x - \frac{1}{3})^2$

$= (3x - 1)^2$