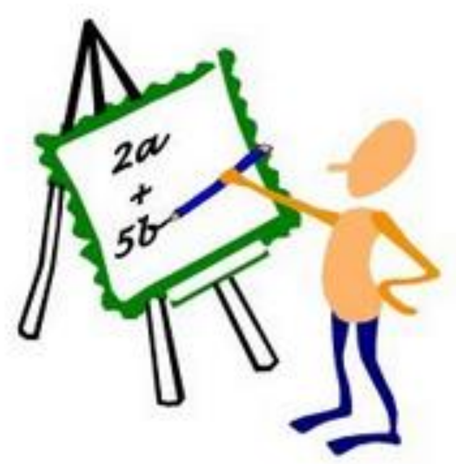
Calcul algébrique

somme de termes et produit de facteurs



1. Somme de termes et produit de facteurs

1. Exemples

Sommes (ou différences) de termes	Produits de facteurs
$x - 3$	$(6x + 1)(x - 1)$
$(2x + 4) + 3x$	$2(1 + 6x)$
$(5 - x) - (9 + 9x)$	$(8 - x)(2 + x)$
$3 + (2 + 3x)(x - 2)$	$(3 + 8x)(x - 8)^2$

Remarque : $\frac{3}{2-x}$ est appelé un **quotient** .

C'est le produit de **3 par l'inverse de 2 – *x*** .

2. Valeurs interdites

Pour certaines expressions dépendantes de *x*, il existe des valeurs de *x* pour lesquelles on ne peut pas calculer l'expression.

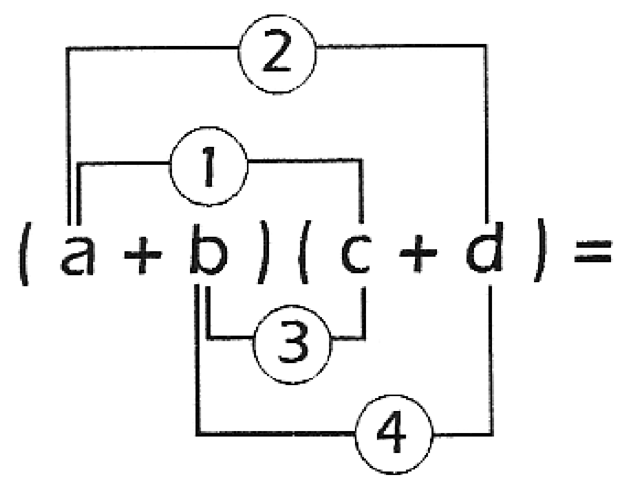
Exemple : Soit $A(x) = \frac{x+5}{4+x}$.

Pour $x = -4$, $4 + x = 0$. Il n'est donc pas possible de calculer $A(-4)$.

Pour l'expression $A(x)$, x désigne **un nombre réel différent de –4.**

Calcul algébrique

développer et factoriser



2. Développer et factoriser

1. Distributivité

Définitions :

Développer c'est **transformer un produit en une somme (ou différence) de termes.**

Factoriser c'est **transformer une somme en un produit de facteurs.**

Exemple :

DEVELOPPER

$x(4 - y) = \mathbf{4x - xy}$

FACTORISER

On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition (ou la soustraction).

Dans l'exemple, on a **distribué** la multiplication par x sur les termes 4 et y.

2. Double-distributivité

Propriété :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

① ② ③ ④

3. Identités remarquables

Propriété :

Pour tous nombres réels a et b, on a :

DEVELOPPER →

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

← FACTORISER

Exemples :

$(x-5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

$(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x+3)^2$

Méthode : Développer une expression

Développer et réduire l'expression suivante : $A = (x + 2)(4x - 3) - x(7 - x)$

On développe le membre de gauche en appliquant la **double-distributivité** et le membre de droite en appliquant la **distributivité**. On fait attention aux signes !

$$A = (x + 2)(4x - 3) - x(7 - x)$$

$$A = 4x^2 - 3x + 8x - 6 - 7x + x^2$$

$$A = 5x^2 - 2x - 6$$

4. Factoriser

Méthode : Factoriser une expression

Factoriser les expressions suivantes :

$B = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$

$C = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x)$

$D = 5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1)$

$E = 3x^2 - x$

Pour factoriser, il faut trouver dans chacun des termes de l'expression un **facteur commun**.

Il s'agit ici de **$2 + 3x$**.

$B = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$

$= (2 + 3x)(3 - (5 + 2x))$

$= (2 + 3x)(3 - 5 - 2x)$

$= (2 + 3x)(-2 - 2x)$

$C = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x)$

$= (2 - 5x)(2 - 5x) - (2 - 5x)(1 + x)$

$= (2 - 5x)((2 - 5x) - (1 + x))$

$= (2 - 5x)(2 - 5x - 1 - x)$

$= (2 - 5x)(1 - 6x)$

Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :

$D = 5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1)$

$= 5(1 - 2x) + (4 + 3x)(1 - 2x)$

$= (1 - 2x)(5 + 4 + 3x)$

$= (1 - 2x)(9 + 3x)$

$E = 3x^2 - x$

$= 3x^2 - x \times 1$

$= x(3x - 1)$

Méthode : Factoriser en utilisant une identité remarquable

Factoriser l'expression suivante : $A = (3x + 1)^2 - 49$

On reconnaît une identité remarquable du type $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$ **avec**

a = 3*x* + 1 et *b* = 7

$$
\begin{aligned}
A &= (3x + 1)^2 - 49 \\
&= (3x + 1)^2 - 7^2 \\
&= ((3x + 1) - 7)((3x + 1) + 7) \\
&= (3x + 1 - 7)(3x + 1 + 7) \\
&= (3x - 6)(3x + 8)
\end{aligned}
$$

Calcul algébrique

réduire au même dénominateur

$$\frac{4}{3} = \frac{4 \times 4}{3 \times 4} \quad \text{et} \quad \frac{8}{4} = \frac{8 \times 3}{4 \times 3}$$

même dénominateur

$$\frac{4 \times 4}{12} \quad \text{et} \quad \frac{8 \times 3}{12} \Rightarrow \frac{16}{12} \quad \text{et} \quad \frac{24}{12}$$

3. Réduire au même dénominateur

Définition :

Réduire au même dénominateur c'est transformer une somme (ou une différence) de deux fractions en une seule fraction.

Propriété : Pour tout nombre *a*, *b*, *c* et *d*, réels on a :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Méthode : Réduire au même dénominateur

Réduire les expressions suivantes au même dénominateur :

$$A=\frac{7x}{x-2}-\frac{5}{3-x} \quad \text{et} \quad B=3+\frac{5x}{2x+1}$$

$$A=\frac{7x}{x-2}-\frac{5}{3-x}$$

$$=\frac{7x(3-x)}{(x-2)(3-x)}-\frac{5(x-2)}{(3-x)(x-2)}$$

$$=\frac{7x(3-x)-5(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$

$$=\frac{21x-7x^2-5x+10}{(x-2)(3-x)}$$

$$=\frac{-7x^2+16x+10}{(x-2)(3-x)}$$

$$B = 3 + \frac{5x}{2x+1}$$

$$= \frac{3}{1} + \frac{5x}{2x+1}$$

$$= \frac{3(2x+1)}{2x+1} + \frac{5x}{2x+1}$$

$$= \frac{3(2x+1)+5x}{2x+1}$$

$$= \frac{6x+3+5x}{2x+1}$$

$$= \frac{11x+3}{2x+1}$$

Calcul algébrique

résoudre une équation

TYPE OF EQUATIONS

ONE-STEP EQUATIONS	TWO-STEP EQUATIONS
$x + 3 = 6$	$2x + 3 = 6$

MULTI-STEP EQUATIONS	SYSTEM OF EQUATIONS
$2x + 4 = x + 6$	$2x + 3 = 7$ $3x - 4 = 11$

4. Résoudre une équation

1. Équation du 1^{er} degré

Définition : deux équations E et E' sont équivalentes quand elles ont les mêmes solutions.

On note alors $(E) \Leftrightarrow (E')$

Exemple : résoudre l'équation $5x + 7 = 3 - 2x$.

$5x + 7 = 3 - 2x \Leftrightarrow 5x + 2x = 3 - 7$

$\Leftrightarrow 7x = -4$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{7}$

$S = \{-\frac{4}{7}\}$

2. Équation produit

Théorème : Règle du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si **l'un de ses facteurs est nul.**

$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$

« $\Leftrightarrow$ signifie équivaut à »

Application : résoudre l'équation $(5x + 1)(3x + 5) = 0$.

$(5x + 1)(3x + 5) = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{5x + 1 = 0 \; ou \; 3x + 5 = 0}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{5x = -1 \; ou \; 3x = -5}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = -\frac{1}{5} \; ou \; x = -\frac{5}{3}}$

$S = \mathbf{\{-\frac{1}{5} \; ; -\frac{5}{3}\}}$

3. Équation de la forme $x^2 = a$

Théorème : Solutions de l'équation $x^2=a$

1er cas : a < 0 alors **l'équation n'a pas de solution.**

2ème cas : a = 0 alors **l'équation a une seule solution 0.**

3ème cas : a > 0 alors **l'équation a deux solutions qui sont** $\boldsymbol{\sqrt{a} \; et -\sqrt{a}}$

Exemples : Résoudre les équations suivantes $x^2 = 5$; $(x-1)^2 = 0$; $(x+5)^2 = -3$

$x^2 = 5 \Leftrightarrow \mathbf{x = \sqrt{5} \; ou \; x = -\sqrt{5}}$

$(x+5)^2 = -3$ **n'a pas de solution.**

$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x - 1 = 0} \Leftrightarrow \mathbf{x = 1}$

4. Équation quotient

Théorème : Règle du quotient

Pour tout x n'annulant pas l'expression $Q(x)$, $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow$ **$P(x) = 0$**

Méthode : résoudre l'équation : $\frac{2x+5}{x-1} = \frac{2x-3}{x-2}$

1. Chercher les valeurs interdites : l'équation n'est pas définie pour **$x - 1 = 0$**

et $x - 2 = 0$ donc pour **$x = 1$ et $x = 2$.**

2. Ecrire l'équation sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$:

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$, $\frac{2x+5}{x-1} = \frac{2x-3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{(2x+5)(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{(2x-3)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(2x+5)(x-2)-(2x-3)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$

3. Résoudre l'équation $P(x) = 0$

$(2x + 5)(x - 2) - (2x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 4x + 5x - 10) - (2x^2 - 2x - 3x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 10 - 2x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{6}$

4. Vérifier que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites :

$\frac{11}{6} \notin \{1;2\}$ donc $S=\{\frac{11}{6}\}$

Exercice : Résoudre les équations :

a) $\frac{2x+3}{5x-1} = 2$ b) $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$ c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$

Calcul algébrique

résoudre une inéquation

$$(4x-1)^2 > x^2+1$$

5. Résoudre une inéquation

Définition : Résoudre une inéquation d'inconnue x, c'est trouver toutes les valeurs possibles du réel x telles que l'inégalité soit vraie.

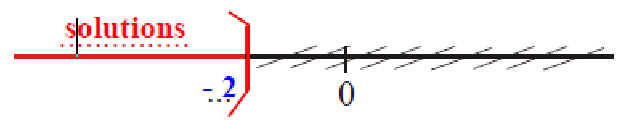
Exemple 1 : Résoudre l'inéquation suivante : $5x + 6 \leq -4$

$5x + 6 \leq -4 \Leftrightarrow 5x + 6 - \mathbf{6} \leq -4 - \mathbf{6}$ On isole les x en soustrayant 6 de chaque côté

$\Leftrightarrow 5\boldsymbol{x} \leq -10$ On divise par 5 de chaque côté.

$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} \leq \frac{-10}{5}$ (5 >0, on ne change pas le sens de l'inégalité)

$\Leftrightarrow x \leq -2$ Les **solutions** sont tous les **nombres inférieurs** ou **égaux** à **- 2**



Exemple 2 : Résoudre l'inéquation suivante : $-2x - 8 > x + 1$

$-2x - 8 > x + 1 \Leftrightarrow -3x - 8 > 1$

$\Leftrightarrow -3x - 8 + 8 > 1 + 8$

$\Leftrightarrow -3x > 9$

$\Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} < \frac{9}{-3}$ (comme – 3 est négatif, **on change** le sens de l' inégalité)

$\Leftrightarrow x < -3$ Les **solutions** sont tous les **nombres strictement inférieurs à - 3**

A retenir : On change le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif.