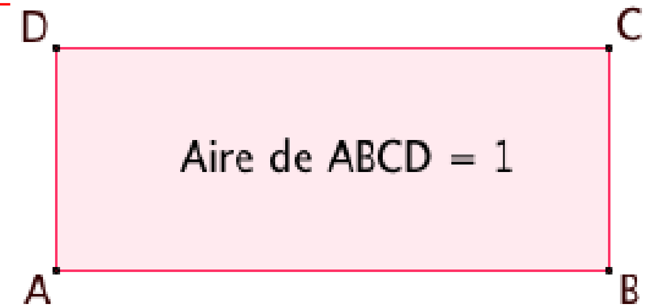
Fonctions, généralités

activité d’introduction

1. Activité d'introduction



On considère un **rectangle ABCD d'aire 1**.

L'objectif du problème est de déterminer les dimensions d'un tel rectangle tel que son périmètre soit minimum.

1. Cas particuliers

a) Prouver que AB = 2 et BC = 0,5 conviennent et calculer le périmètre de ABCD dans ce cas : **$2 \times 0{,}5 = 1$; $P = 2 \times (2 + 0{,}5) = 2 \times 2{,}5 = 5$**

b) Faire quelques essais pour d'autres valeurs de AB.

$AB \times BC = 1 \times 1 = 1$; $P = 2 \times (1 + 1) = 2 \times 2 = 4$

2. Cas général

a) On pose $AB = x$. Exprimer le périmètre P de ABCD en fonction de x.

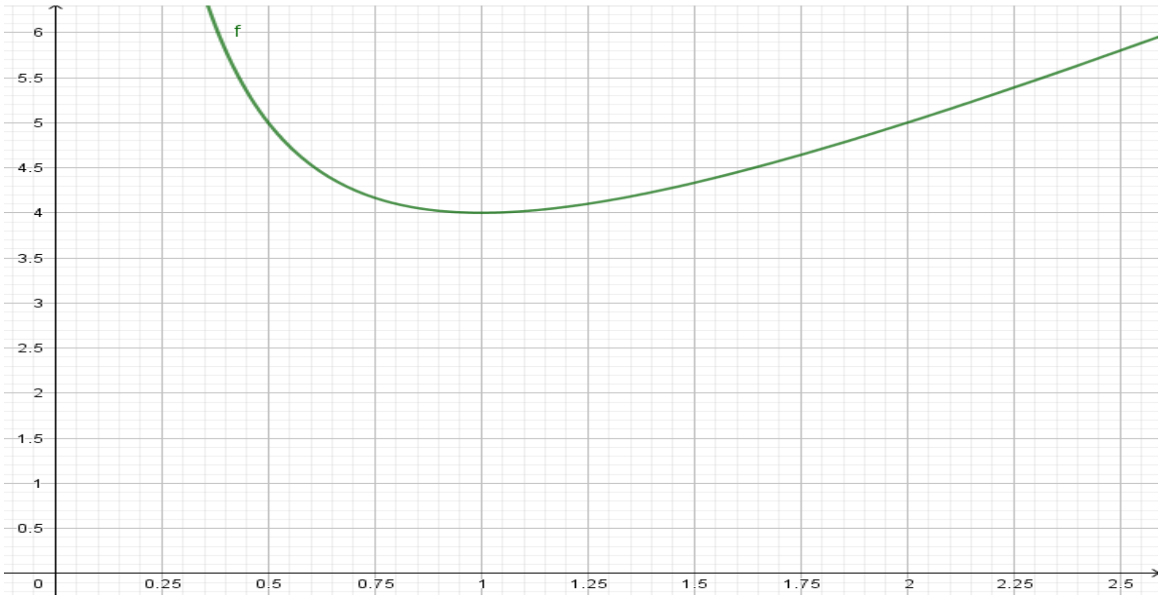
On peut modéliser le problème ci-dessus à l'aide de la fonction P :

$$P(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

b) Compléter le tableau de valeurs.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$P(x)$	**8,5**	**5**	$\frac{25}{6} \approx 4{,}2$	**4**	**4,1**	$\frac{13}{3} \approx 4{,}3$	$\frac{65}{14} \approx 4{,}6$	**5**	$\frac{94}{18} \approx 5{,}4$	**5,8**

c) Sur une feuille de papier millimétrée, réaliser un graphique avec les données ci-dessus.



d) Conclure.

Le périmètre du rectangle est minimal (égal à **4**) pour $x = 1$ donc pour

AB = AD = 1 cm

Le fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Fonctions, généralités

modéliser par une fonction

2. Modéliser par une fonction

Définition : Soit D un ensemble de nombres.

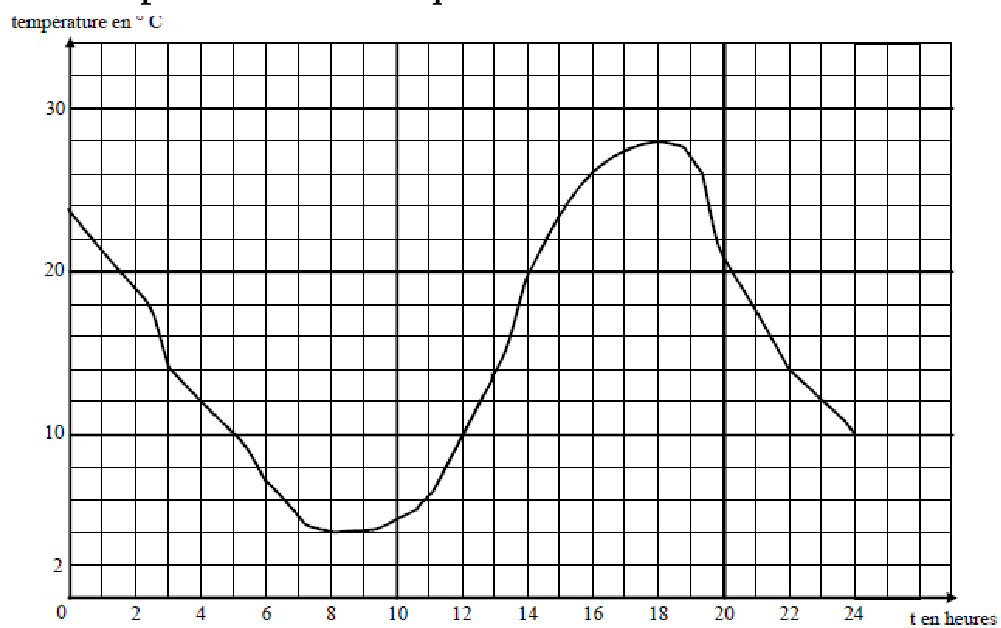
Une fonction *f* définie sur D est un procédé qui à tout nombre *x* de D associe un unique nombre *y*.

Le nombre *x* est appelé …… **variable** …… de la fonction f.

Une fonction peut être définie par un …… **tableau de valeurs** ……, une …… **courbe** …… ou une …… **formule** …… .

1. Fonction définie par une courbe

Exemple : Un thermomètre enregistreur reporte automatiquement sur une feuille la température au cours d'une journée.



Le graphique ci-dessus donne l'évolution de la température en fonction de l'heure de la journée.

1. A l'aide du graphique, indiquer les températures relevées à 10h et à 20h.

A 10h : 5°C et à 20h : 21°C

2. A quelle(s) heure(s) la température était-elle de 14° ? **A 3h et à 13h**

3. A quelle(s) heure(s) la température était-elle supérieure à 10° ? **Entre 0h et 5h puis entre 12h et 24h.**

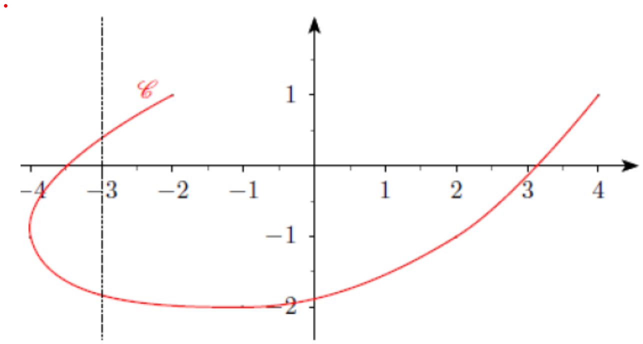
4. Quelle a été la température minimale au cours de la journée ? la température maximale ? **Mini: 4°;Maxi: 28°**

5. Comment la température a-t-elle variée au cours de la journée ?

Elle a diminué entre minuit et 8h puis augmenté entre 8h et 18h pour enfin baisser à nouveau entre 18h et minuit.

Remarque :

La courbe suivante **ne représente pas une fonction**



2. Fonction définie par un tableau de valeurs

Exemple : la taille en fonction de l'âge

âge	5	10	14	15	16	17	18
taille	85	120	147	161	169	175	179

Exercice : Les tableaux de valeurs suivants définissent-ils une fonction ? Expliquer pourquoi.

Tableau 1

-3	1	3,5	1	5
2	3,4	5	-2	2

Tableau 2

-3	1,5	3	6,5	7
2	3.4	5	-2	2

Le tableau 1

ne définit pas une fonction, car au nombre 1 de la première ligne, on ne peut pas associer un unique nombre de la deuxième ligne. (Ici deux nombres différents sont associés à la valeur 1.)

Le tableau 2

définit une fonction, car à chaque nombre de la première ligne on peut associer un unique nombre de la deuxième ligne.

3. Fonction définie par une formule

Exemple 1: Retour sur l'activité initiale : $P: x \longrightarrow 2x + \frac{2}{x}$

Exemple 2 : Un scooter roule à la vitesse constante de 50 km.h^{-1}. A chaque durée de trajet *t* (en h) correspond une distance parcourue *d* (en km). On a alors *d* = 50 t

On définit ainsi la fonction *f* qui à la durée du trajet en heure associe la distance parcourue en km,

On note *f* : t ⟶ d. La variable est la durée t.

Fonctions, généralités

premières définitions et exemples

3. Premières définitions et exemples

1. Définitions

Définition : Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$.
Une fonction f est un procédé de calcul, qui à chaque réel x de l'intervalle D, associe un unique réel y, noté $f(x)$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

$f(x)$ est l' **image** de x ; x est un **antécédent** de y

D (noté aussi D_f) est appelé **ensemble de définition** de la fonction f.

On dit que f est **définie sur D**.

Remarque Df est l'ensemble de tous les nombres x de l'ensemble de départ ayant une image par f.

Exemple 1: Soit la fonction : $P: x \to 2x + \dfrac{2}{x}$. $D_P =]0; +\infty[$.

L'image de 1 est **4** et l'antécédent de 5 est **2**.

Exemple 2 : On considère la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{-2x+4}$.
Déterminer Dg.

g existe si, et seulement si, $\mathbf{-2x + 4 \geq 0}$ $\mathbf{-2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq 2.}$

Donc Dg =] –∞ ; 2].

2. Courbe représentative d'une fonction

Définition : Courbe représentative : C'est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient l'équation de la courbe $y = f(x)$

$$M(x_M; y_M) \in C_f \Leftrightarrow y_M = f(x_M)$$

Remarque :

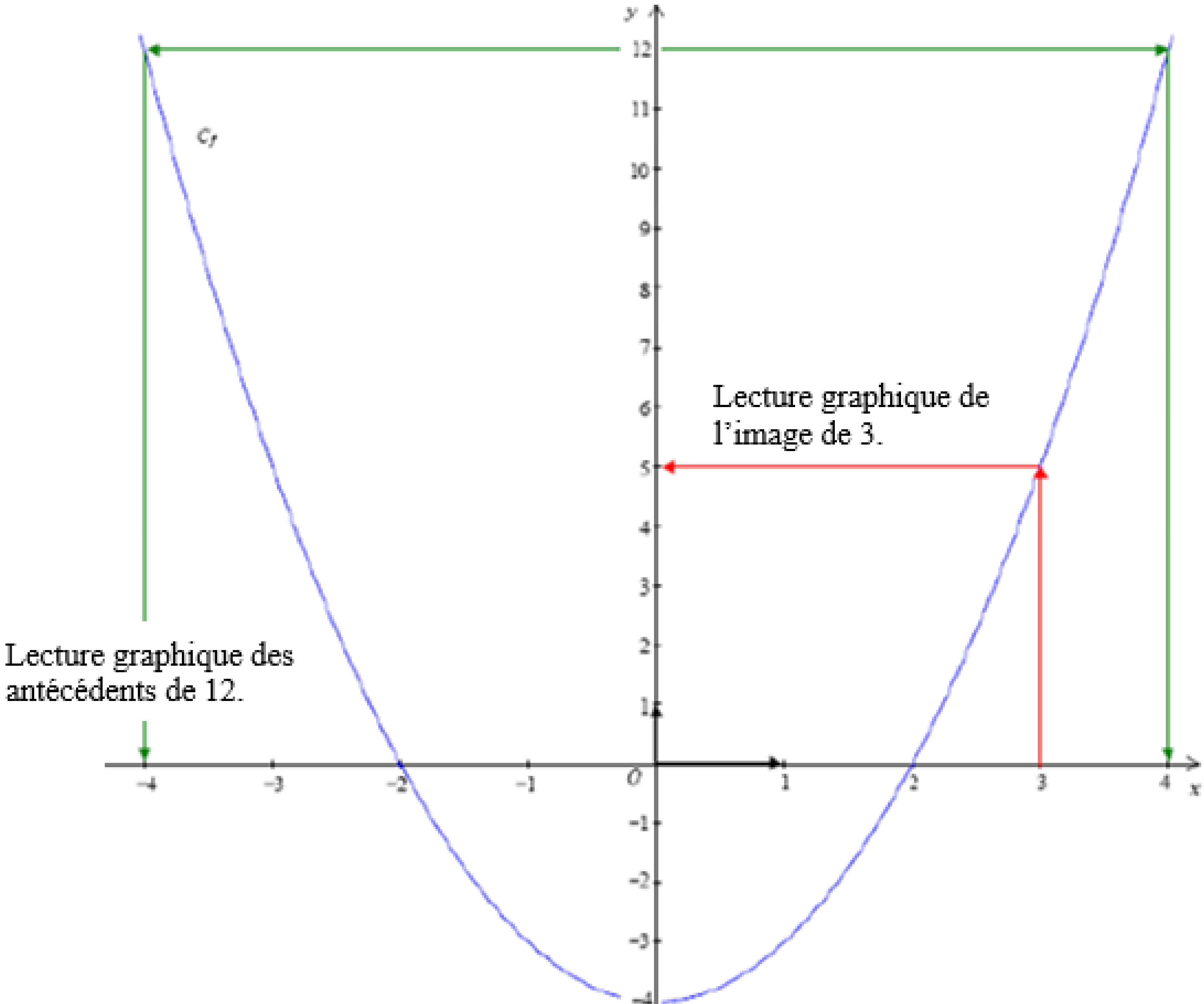
A chaque point M de la courbe, on associe deux nombres : le nombre x lu en abscisse que l'on appelle antécédent et le nombre $y = f(x)$ lu en ordonnée que l'on appelle image.

Pour réaliser une représentation graphique on commence par remplir un tableau de valeurs.

Exemple avec $f(x) = x^2 - 4$:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
f(x)	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

On place les points dans un repère, puis on les relie, à la main.


Lecture graphique de
l'image de 3.
Lecture graphique des
antécédents de 12.
C_f
y
x
O
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

Fonctions, généralités

image et antécédent(s) d'un nombre

4. Image et antécédent(s) d'un nombre

1. Lire l'image d'un nombre

L'image de *a* par *f* est ***f*(*a*).**

Pour lire graphiquement l'image de *a* :

On place « ***a*** » sur l'axe des **abscisses**

•On cherche le point de la courbe d'abscisse *a*.

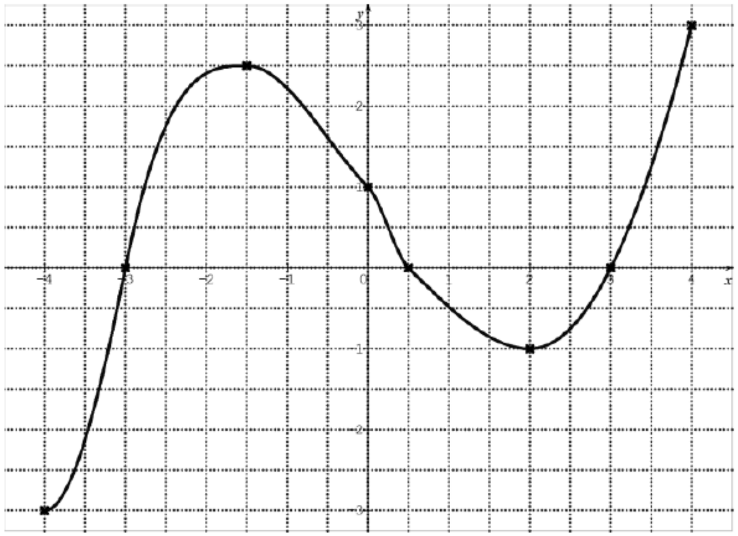
•On projette ce point sur l'axe des **ordonnées** .

Exemple :

On considère la représentation graphique de la fonction *f* ci–contre définie sur [- 4 ;4].

Compléter :

- L'image de 2 : **-1**
- L'image de 0 : **1**
- $f(-1{,}5) =$ **2,5**
- 0 est l'image de **-3 ; 0,5 et 3** par la fonction *f*



2. Calculer l'image d'un nombre

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

Calculer les images exactes de 2 et $\sqrt{3}$ par f.

$f(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 1 = 3 \times 4 - 10 + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$

$f(\sqrt{3}) = 3 \times (\sqrt{3})^2 - 5 \times \sqrt{3} + 1 = 3 \times 3 - 5\sqrt{3} + 1 = 10 - 5\sqrt{3}$

Exemple 2

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x+2} + 3$

a) déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

b) Calculer l'image de 3 et de – 1

a) **La fonction g est définie si, et seulement si, $x + 2 \neq 0$; $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. D$g$ = $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$**

b) $g(3) = \dfrac{1}{3+2} + 3 = \dfrac{1}{5} + 3 = \dfrac{16}{5}$; $g(-1) = \dfrac{1}{-1+2} + 3 = \dfrac{1}{1} + 3 = 4$

3. Lire les antécédents d'un nombre

Les antécédents de b par *f* sont les solutions de l'équation *f*(*x*) = b

Pour lire graphiquement les antécédents de *b* :

- On place « ***b*** » sur l'axe des **ordonnées**
- On cherche le(s) point(s) de la courbe d'ordonnée *b*.
- On projette ce(s) point(s) sur l'axe des **abscisses**

Exemple :

Soit *f* une fonction dont on donne la courbe représentative C_f ci-contre.

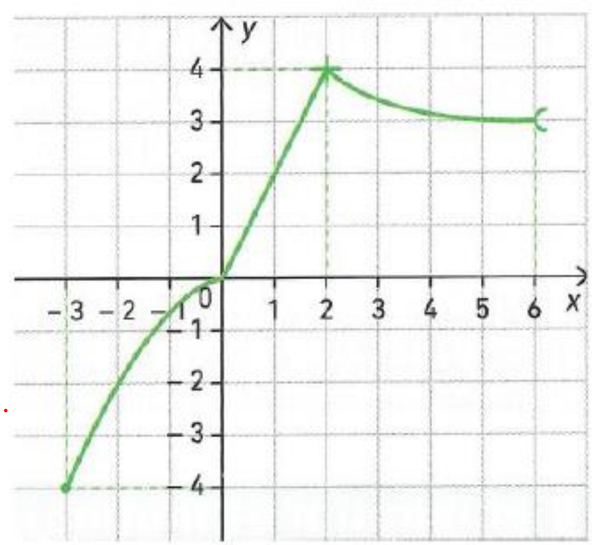
Par lecture graphique, donner :

•Les antécédents de 2 par *f* : **1**

•Les antécédents de 5 par *f* : **aucun**

•Les antécédents de -2 par *f* : **-2**

•Le nombre d'antécédents de 3,5 par *f* : **2 antécédents**



4. Calculer les antécédents d'un nombre

Chercher les antécédents de b par f revient à résoudre l'équation $f(x) = b$

Pour vérifier si une valeur est solution ou non : On remplace x par la solution proposée dans chaque membre, on effectue les calculs **séparément**, puis on regarde si l'égalité est vérifiée.

Exemple 1 : Déterminer le ou les antécédents de 0 puis ceux de 2 par f définie par $f(x)=x^2-4$

On résout les équations : $x^2 - 4 = 0$ et $x^2 - 4 = 2$:

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Les antécédents de 0 sont -2 et 2.

$x^2 - 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$. Les antécédents de 2 sont $-\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$.

Exemple 2 : on considère la fonction g définie sur $R\backslash\{1\}$ par : $g : x \longrightarrow \dfrac{x^2+3}{x+1}$

Le nombre 3 a-t-il pour antécédents -3 et 3 par la fonction g ?

On calcule les images de -3 et de 3 par g :

$g(-3) = \dfrac{(-3)^2+3}{-3+1} = \dfrac{9+3}{-2} = \dfrac{12}{-2} = -6$ donc -3 n'est pas un antécédent de 3 par g.

$g(3) = \dfrac{3^2+3}{3+1} = \dfrac{9+3}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$ donc 3 est un antécédent de 3 par g.

Fonctions, généralités

résolution graphique d'équations et d'inéquations

5. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

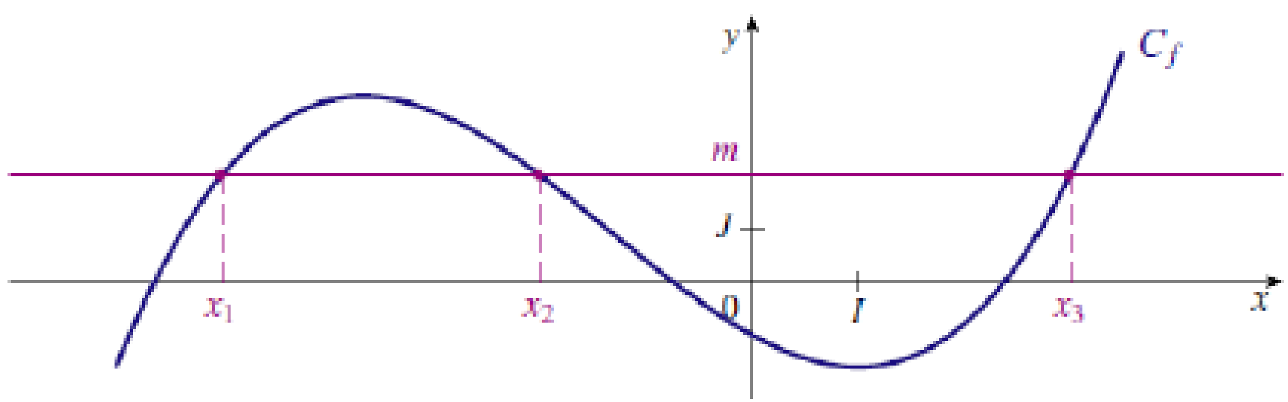
On considère une fonction f et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Résolution d'équation de la forme $f(x) = k$ *(fonction constante)*

Propriété : Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe qui se situent sur la droite d'équation $y = k$.

Dans la pratique, pour résoudre l'équation $f(x) = k$:
On trace la droite d'équation $y = k$ (celle-ci est parallèle à l'axe des abscisses.)
On prend les **ABSCISSES** des points d'intersection de la courbe avec la droite.

Exemple :
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = m$ est : $S = \{x_1; x_2; x_3\}$



2. Résolution d'équation de la forme $f(x) < k$ ou $f(x) \geq k$

Propriété : Les solutions de l'équation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe qui se situent **au-dessous** de la droite d'équation $y = k$.

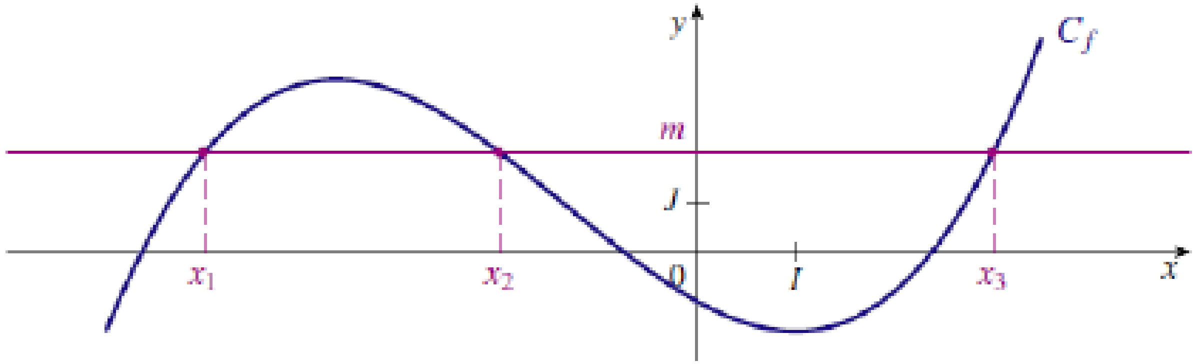
Dans la pratique, pour résoudre l'inéquation $f(x) < k$:
On trace la droite d'équation $y = k$ (celle-ci est parallèle à l'axe des abscisses.)
On prend les **ABSCISSES** des points de la courbe se situant en dessous de la droite.

Propriété : Les solutions de l'équation $f(x) \geq k$ sont les abscisses des points de la courbe qui se situent **au-dessus ou sur** la droite d'équation $y = k$.

Dans la pratique, pour résoudre l'inéquation $f(x) \geq k$:
On trace la droite d'équation $y = k$
On prend les **ABSCISSES** des points de la courbe se situant au-dessus ou sur la droite.
On prend les **ABSCISSES** des points d'intersection de la courbe avec la droite.

Exemple :

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ est $S = [x_1\ ;\ x_2] \cup [x_3\ ;\ +\infty\ [$



Exercice

On considère la fonction f, définie sur [- 7 ; 5], représentée graphiquement ci-contre.

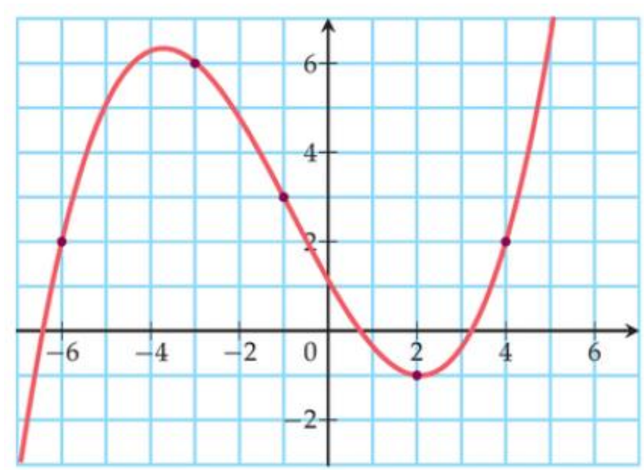
Par lecture graphique, résoudre (on donnera des valeurs approchées si nécessaire) :

$f(x) = -3$: **S = {− 7}**

$f(x) = 2$: **S = {− 6 ; 4}**

$f(x) > 5$: $\boldsymbol{S =]-5\ ;\ -2[\ \cup]4{,}7\ ;\ 5\ [}$

$f(x) \leq -1$: $\boldsymbol{S = \{2\} \cup]-7\ ;\ -6{,}5[}$



3. Résolution d'équations de la forme $f(x) = g(x)$ ou d'inéquations de la forme $f(x) \geq g(x)$

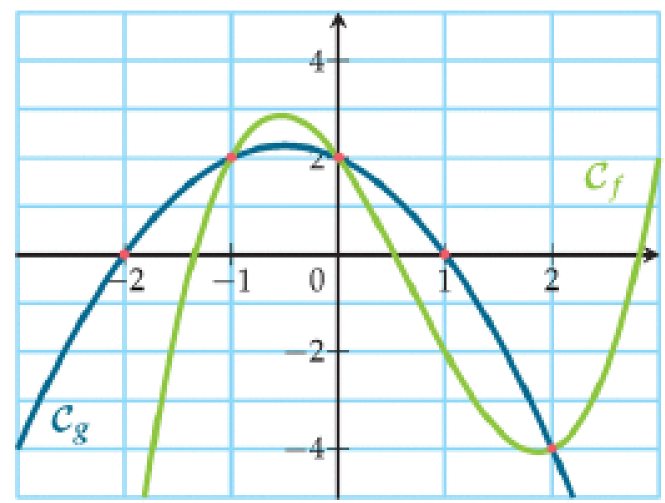
Propriété : Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f qui se situent **sur** la courbe C_g.

Propriété : Les solutions de l'équation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f qui se situent **au-dessus ou sur** la courbe C_g.

Exercice :

Voici les courbes de deux fonctions f et g définies sur [- 3 ;3].

Résoudre graphiquement :



$f(x) = g(x)$: **S = {-1 ; 0}**

$f(x) < g(x)$: **S = [-3 ; -1[U]0 ; 2[**