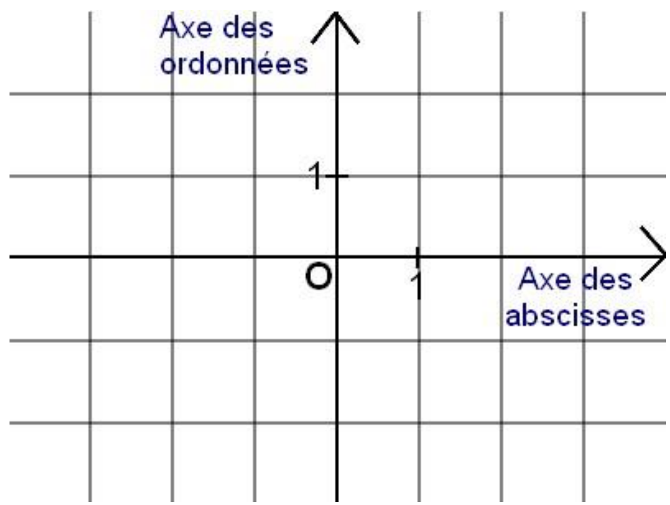
Repérage dans le plan

repérage du plan



1. Repérage du plan

Définition : dans le plan, trois points non alignés O, I et J déterminent

un repère (O , I , J).

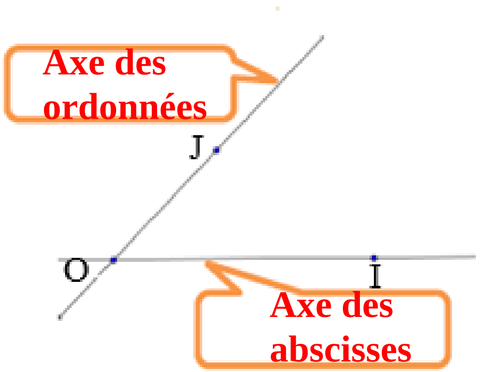
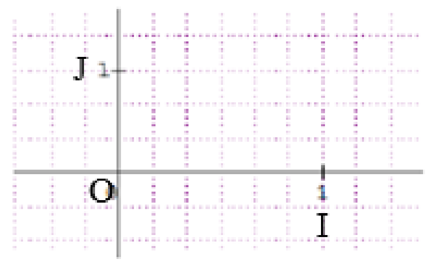
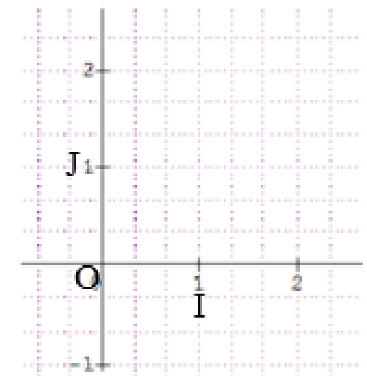
O est appelé l'origine du repère.

La droite (OI) est l'axe des **abscisses** la droite (OJ) est l'axe des **ordonnées**.

Remarque : dans certains exercices et comme on le verra plus tard dans l'année, on pourra noter un tel repère de la façon suivante : $(O , \vec{i} , \vec{j})$

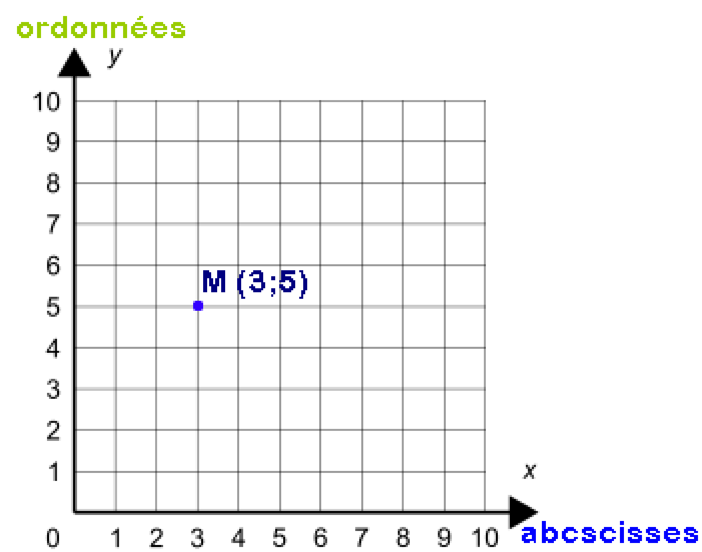
On appelle repère du plan tout triplet de trois points non alignés :

- Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, on dit que (O , I , J) est un repère **orthogonal**.
- Si en plus OI =OJ, on dit que le (O , I , J) est un repère **orthonormal** ou **orthonormé**.
- Sinon, il est quelconque.

Repère quelconque	Repère orthogonal	Repère orthonormal
	 $(0I) \perp (0J)$	 $(0I) \perp (0J)$ et $OI = OJ$

Repérage dans le plan

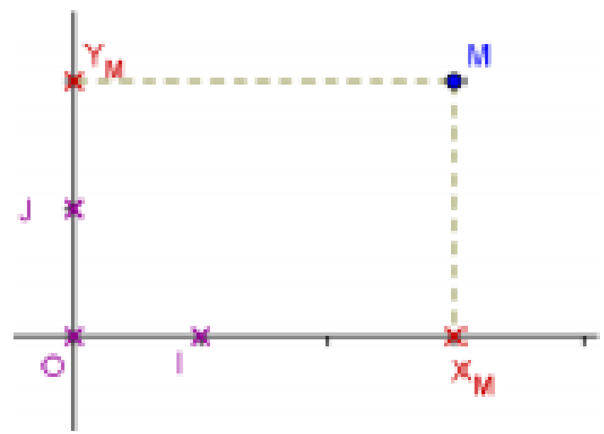
coordonnées d'un point



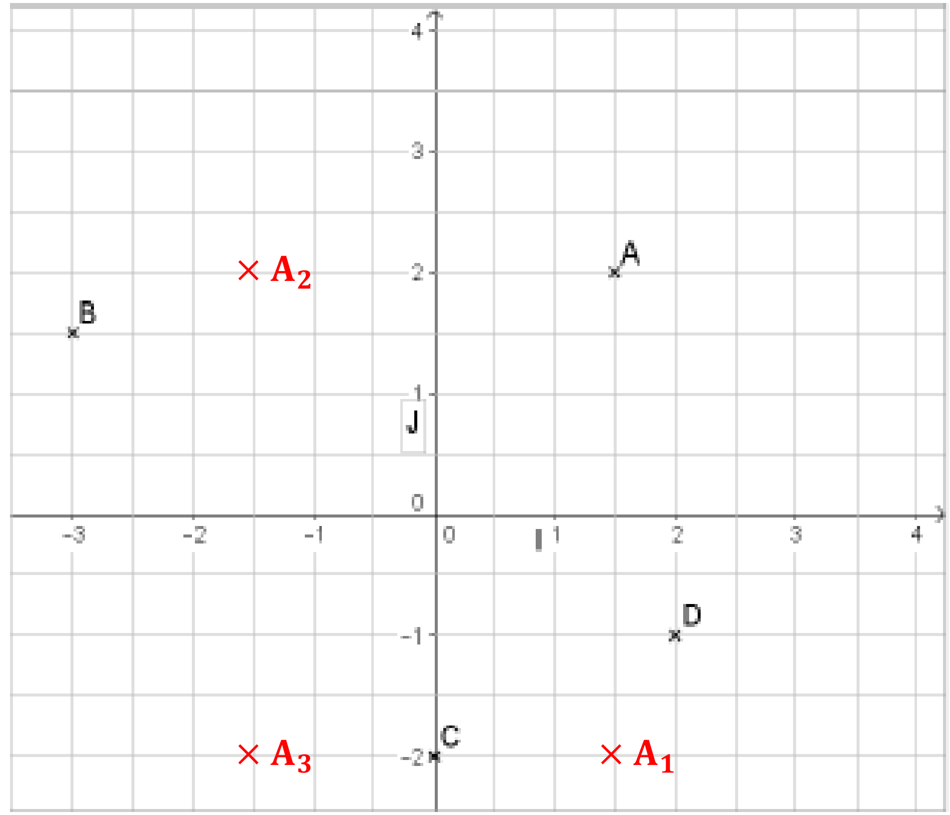
2. Coordonnées d’un point

Définition : Le couple ($x_{M.}$; y_M) de coordonnées est l’unique couple de nombres qui caractérise le point M dans le repère (O, I, J).

x_M est l’abscisse du point M. y_M est l’ordonnée du point M.



Exemple : dans le repère (O,I,J),



- donner les cordonnées des points A, B, C et D.

A(1,5 ; 2) B(-3 ; 1,5) C(0 ; -2) D(2 ; -1)

- quelles sont les coordonnées du symétrique de A par rapport à l'axe (OI) ?

A_1(1,5 ; -2)

- quelles sont les coordonnées du symétrique de A par rapport à l'axe (OJ) ?

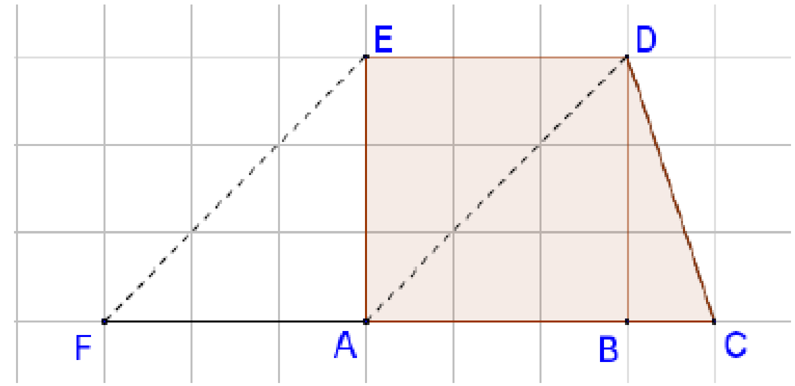
A_2(-1,5 ; 2)

- quelles sont les coordonnées du symétrique de A par rapport au point O ?

A_3(-1,5 ; -2)

Exercice :

On considère la figure ci-contre :



1. Parmi les repères suivants, lequel est orthonormé ?

a. (B, C, D) **b.** (A, B, E) **c.** (A, B, D) **d.** (A, E, F)

ABDE est un carré, donc c’est (A, B, E) qui est orthonormé.

2. Donner dans chacun de ces repères les coordonnées du point E.

Dans le repère (B, C, D), le point E a pour coordonnées (-3 ; 1).

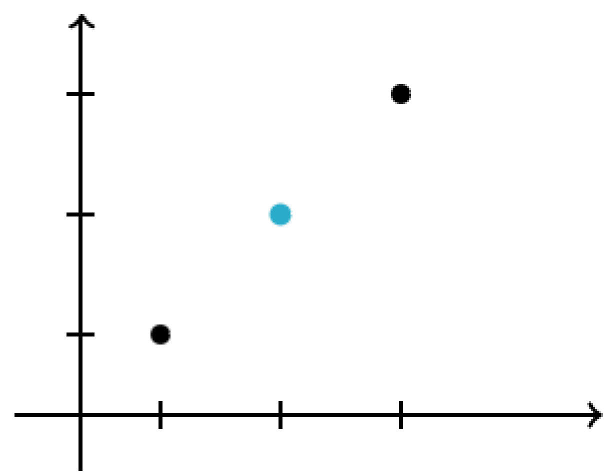
Dans le repère (A, B, E), le point E a pour coordonnées (0 ; 1).

Dans le repère (A, B, D), le point E a pour coordonnées (-1 ; 1).

Dans le repère (A, E, F), le point E a pour coordonnées (1 ; 0).

Repérage dans le plan

coordonnées du milieu d'un segment



3)Coordonnées du milieu d'un segment

Soient A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points distincts ;
on note I le milieu du segment [AB].

Théorème (admis) :
Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Exemple : Soit A(-2 ;3) et B(5 ;2), quelles sont les coordonnées du milieu I du segment [AB] ?

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+5}{2} = 1{,}5 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+2}{2} = 2{,}5$$

Exercice 1
Soit les points R(-1 ; 4) , S (5,5 ; -1,5), T(6,5 ; - 6,1) et U(0 ; - 0,6).

Le quadrilatère RSTU est-il un parallélogramme ?

RSTU est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales se coupent en

en leur milieu. On calcule donc les coordonnées de I et J les milieux de [RT] et [SU].

$$x_I = \frac{x_R + x_T}{2} = \frac{-1+6{,}5}{2} = 2{,}25 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_R + y_T}{2} = \frac{4-6{,}1}{2} = -1{,}05$$

$$x_j = \frac{x_S + x_U}{2} = \frac{5{,}5+0}{2} = 2{,}25 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_S + y_U}{2} = \frac{-1{,}5-0{,}6}{2} = -1{,}05$$

I et J sont confondus, donc RSTU est un parallélogramme.

Exercice 2

Soit les points A(3 ; 1) , B(2 ; 4) et C(- 1 ; 3). Calculer les coordonnées de :

- I milieu de [AC] ; $x_I = \frac{x_A + x_c}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ **et** $y_I = \frac{y_A + y_c}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

- D tel que ABCD soit un parallélogramme.

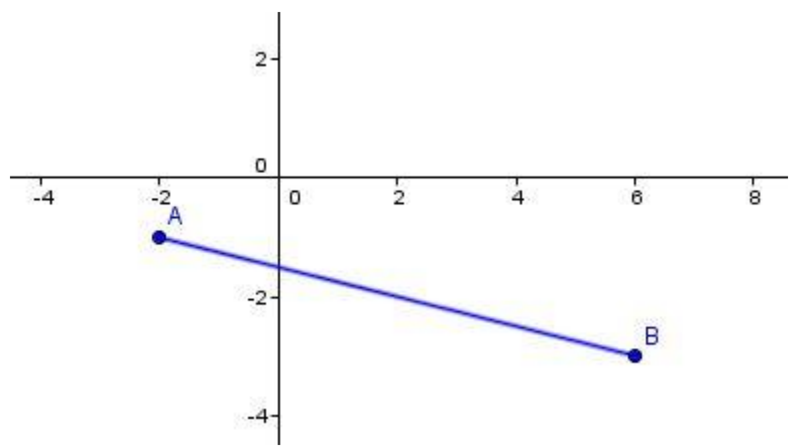
ABCD est un parallélogramme si I est aussi le milieu de [BD].

$x_I = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{2 + x_D}{2} = 1 \quad donc\ x_D = 2 \times 1 - 2 = 0$

$y_I = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{4 + y_D}{2} = 2 \quad donc\ y_D = 2 \times 2 - 4 = 0$

Repérage dans le plan

distance entre deux points



Théorème : DANS UN REPERE ORTHONORMAL ET PAS AILLEURS !!

Soient A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points distincts.

La longueur AB (ou distance entre A et B) est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration :

On considère le point C(x_B, y_A).

On suppose $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$

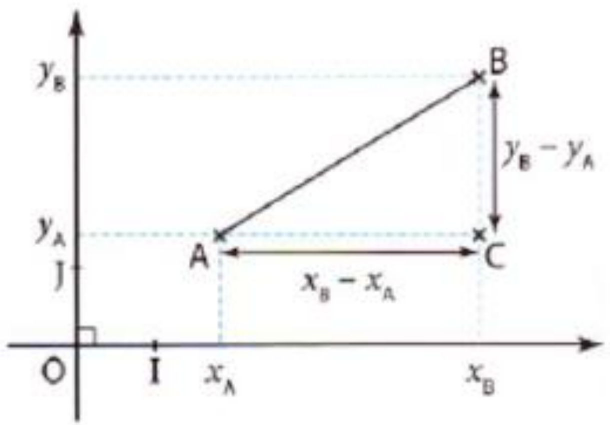
Dans le triangle ABC rectangle en C,

on applique le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Exemple :

On considère, dans un repère orthonormé (O ; I , J), les points A (- 2 ;3) et B (1 ; -5).

Calculer le périmètre du triangle OAB.

On commence par calculer les 3 longueurs du triangle.

OA = $\sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(-2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

OB = $\sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$

Le périmètre de OAB est donc: OA + OB + AB = $\sqrt{13} + \sqrt{26} + \sqrt{73} \approx 17,2$

Exercice 1 :

Le plan est rapporté à un repère **(O, I, J) orthonormal**

1. On considère les points : A(-2 ; 3); B(1 ; -1)et C(9 ; 5). Calculer les distances AB, AC et BC.

2. En déduire qu'ABC est rectangle en B.

1. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(9+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(9-1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100}$

2. Le côté le plus long est AC, on calcule séparément AC^2 et $AB^2 + BC^2$:

D'une part, $AC^2 = (\sqrt{125})^2 = 125$

D'autre part, $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{25})^2 + (\sqrt{100})^2 = 25 + 100 = 125$

On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$,

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

On en déduit que ABC est un triangle rectangle en B.

Exercice 2 :

On se place dans un repère orthonormé (O ; I , J).

Le point P de coordonnées (5 ; 5) appartient-il au cercle de centre A(1 ; 2) et de rayon 5 ?

Rappel :

Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M tels que ΩM = r.

Le point P appartient au cercle de centre A et de rayon 5 si, et seulement si, AP = 5.

On calcule donc la distance AP:

$$AP = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

AP = 5 donc le point P appartient bien au cercle de centre A et de rayon 5.