Formulaire de Mathématiques - collège

I. Arithmétique

Définitions

Notion	Définition
Multiple d'un entier naturel	On appelle multiple d'un nombre entier naturel, le produit de ce nombre entier naturel par un autre nombre entier naturel.
Diviseur d'un entier naturel	Soient deux entiers naturels a et b. a est diviseur de b lorsque le reste de la division euclidienne de b par a est égal à 0.
Diviseur commun à deux entiers naturels	Un entier naturel est diviseur commun à deux entiers naturels s'il les divise tous les deux.
PGCD (plus grand commun diviseur) de deux entiers naturels	Soient deux entiers naturels a et b. Le plus grand de tous les diviseurs communs à a et b est appelé le PGCD de ces deux nombres.
Nombres premiers entre eux	Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.
Fraction irréductible	La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux. Si a et b ne sont pas premiers entre eux, la fraction $\frac{a}{b}$ est simplifiable. En divisant les deux entiers naturels a et b par leur PGCD, on obtient une fraction irréductible.

Algorithme d'Euclide

Il permet de déterminer le PGCD de deux entiers naturels non nuls a et b tels que a > b.
On effectue la division de a par b. On appelle q_1 le quotient obtenu et r_1 le reste.
On effectue la division de b par r_1. On appelle q_2 le quotient obtenu et r_2 le reste. Et ainsi de suite… le dernier reste non nul est le PGCD de a et b.

II. Calcul numérique

Sur les fractions

Opération	Règle
Addition (ou soustraction)	Pour additionner (ou soustraire) deux fractions, on les réduit au même dénominateur puis on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on conserve le dénominateur commun.
Multiplication	Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
Division	Pour diviser deux fractions, on multiplie la fraction numérateur par l'inverse de la fraction dénominateur (la première par l'inverse de la deuxième).

Attention à ne pas confondre **l'opposé et l'inverse** d'un nombre.

- Deux nombres sont opposés si leur somme est nulle.
  Exemples : -5 est l'opposé de 5, $-\frac{1}{3}$ est l'opposé de $\frac{1}{3}$.
- Deux nombres sont inverses si leur produit est 1.
  Exemples : $\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3, $-\frac{1}{3}$ est l'inverse de -3.

Sur les puissances

► *a* et *b* étant deux nombres non nuls, m et n étant des entiers naturels :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

► Remarques relatives aux puissances de 10 :

- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$
- $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$

Sur les radicaux

a et b sont deux nombres réels positifs,

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Notation scientifique

Tout nombre positif x peut s'écrire sous la forme :
$x = \pm a \times 10^n$ où $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif.

III. Calcul littéral

Développer à l'aide de la propriété de distributivité

On utilise les règles de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
Quels que soient les nombres a, b, c et d :

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Développer, factoriser à l'aide des identités remarquables

On distingue **trois identités remarquables**, a et b étant deux réels quelconques,

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Equations produits

On utilise la propriété : lorsqu'un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul : si AB = 0 alors A = 0 ou B = 0.

IV. Statistiques

Caractéristiques de position

Notion	Définition
Fréquence d'une valeur	On appelle fréquence d'une valeur, le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. On l'exprime souvent en pourcentage.
Moyenne d'une série statistique	C'est le nombre m égal au quotient de la somme de toutes les valeurs de la série par l'effectif total.
Médiane d'une série statistique	C'est la valeur qui partage la série statistique, **rangées par ordre croissant** (ou décroissant), en deux parties de même effectif. Si l'effectif total de la série est un nombre impair, la médiane est la valeur centrale de la série. Sinon, c'est un nombre compris entre les deux valeurs centrales de la série. On prend souvent pour médiane la moyenne de ces deux valeurs.

Caractéristiques de dispersion

Notion	Définition
Etendue d'une série statistique	C'est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série statistique.
1^{er} quartile d'une série statistique	On appelle 1^{er} quartile d'une série la plus petite valeur q_1 des termes de la série pour laquelle au moins un quart (25%) des données sont inférieures ou égales à q_1.
$3^{ème}$ quartile d'une série statistique	On appelle $3^{ème}$ quartile d'une série la plus petite valeur q_3 des termes de la série pour laquelle au moins trois quarts (75%) des données sont inférieures ou égales à q_3.

V. Probabilités

Soit E un événement.

► La probabilité de réalisation de E est un nombre p(E) compris entre 0 et 1.

► Si p(E) = 0, alors l'événement est **impossible**.

► Si p(E) = 1, alors l'événement est **certain**.

► Quand les résultats (issues) d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité, alors p(E) = $\frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}} = \frac{n}{N}$

► Notons $\overline{\mathrm{E}}$ l'événement contraire de E (c'est-à-dire l'événement « non E »), alors p(E) + p($\overline{\mathrm{E}}$) = 1.

VI. Angles

Angles particuliers

► **Angle droit** : c'est un angle dont la mesure est égale à 90°.

► **Angle plat** : c'est un angle dont la mesure est égale à 180°.

► **Angles complémentaires** : Ce sont deux angles dont la somme des mesures vaut 90°.

► **Angles supplémentaires** : Ce sont deux angles dont la somme des mesures vaut 180°.

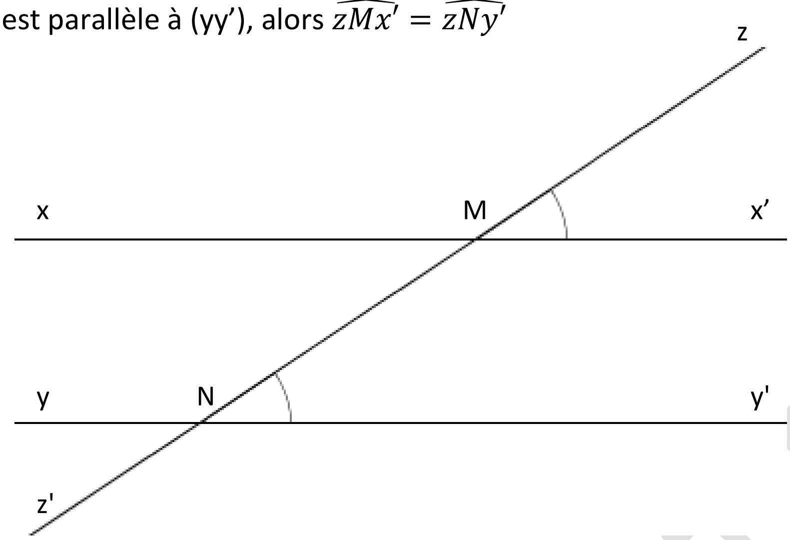
Somme des angles d'un triangle quelconque

Dans un triangle quelconque la somme des mesures des trois angles vaut 180 degrés.

Angles et droites parallèles

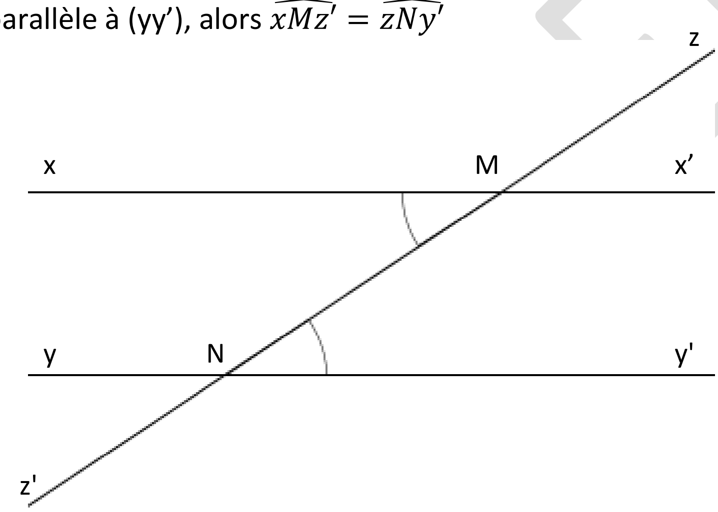
► **Angles correspondants**

Si (xx’) est parallèle à (yy’), alors $\widehat{zMx'} = \widehat{zNy'}$



► **Angles alternes internes**

Si (xx’) est parallèle à (yy’), alors $\widehat{xMz'} = \widehat{zNy'}$



Angles et cercles

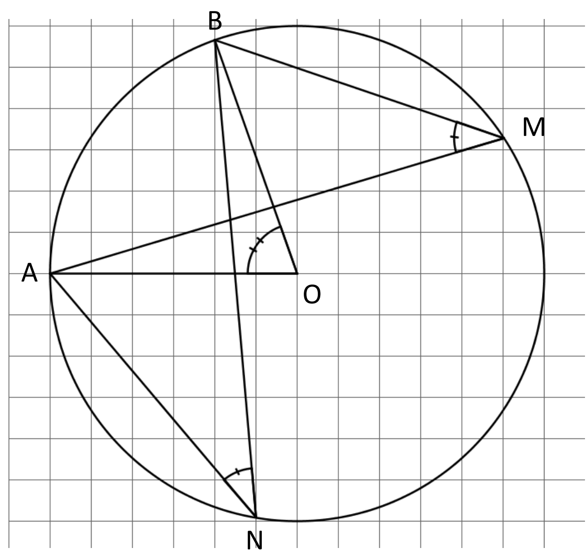
► **Tangente** en un point A d’un cercle de centre 0

En chaque point A d’un cercle, il existe une tangente au cercle. Cette tangente est perpendiculaire à (0A).

► **Angle inscrit, angle au centre**

Soit un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et quatre points A, B, M et N situés sur ce cercle.

L’angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre qui intercepte l’arc $\widehat{AB}$. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont des angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{AB}$.



Propriétés :

- La mesure d’un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l’angle au centre qui intercepte le même arc : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$;
- Si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

VII. Triangles et droites

Droites remarquables dans un triangle

► **Médiane**

- Définition : une médiane dans un triangle est une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.
- Propriété : dans un triangle, les trois médianes se coupent en un même point appelé centre de gravité du triangle. Ce centre de gravité est situé sur chaque médiane au tiers à partir de la base.

► **Médiatrice**

- Définition : une médiatrice dans un triangle est une droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est perpendiculaire à ce dernier.
- Propriété : dans un triangle, les trois médiatrices se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Ce cercle passe par les trois sommets du triangle.

► **Hauteur**

- Définition : une hauteur dans un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.
- Propriété : dans un triangle, les trois hauteurs se coupent en un même point appelé orthocentre du triangle.

► **Bissectrice**

- Définition : une bissectrice dans un triangle est une demi-droite qui partage un angle en deux angles de même mesure. Elle a pour origine le sommet de cet angle.
- Propriété : dans un triangle, les trois bissectrices se coupent en un même point qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle. Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle.

Théorèmes de la droite des milieux

► **Théorème 1 :** si une droite passe par les milieux de deux côtés **d'un triangle** alors elle est parallèle au troisième côté. De plus, la longueur du segment qui joint ces deux milieux est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

► **Théorème 2 :** si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

VIII. Propriétés du triangle rectangle

Somme des angles aigus d'un triangle rectangle

La somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 90°. Ces deux angles sont donc complémentaires.

Triangle rectangle et cercle circonscrit

► **Propriété 1 :** tout triangle ABC rectangle en A est inscriptible dans un demi-cercle de diamètre [BC].

► **Propriété 2 :** dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.
Réciproquement, si dans un triangle la médiane relative à un côté mesure la moitié de ce côté, alors le triangle est rectangle.

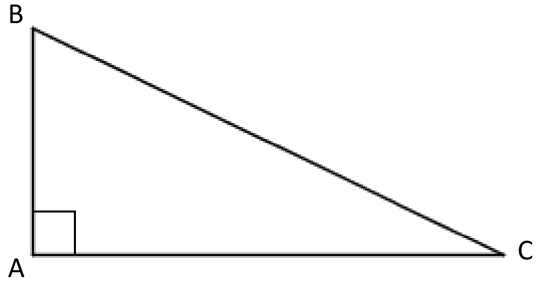
Théorème de Pythagore

► Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

► Si un triangle ABC est tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.

Relations trigonométriques dans un triangle

Soit un triangle rectangle ABC, rectangle en A.



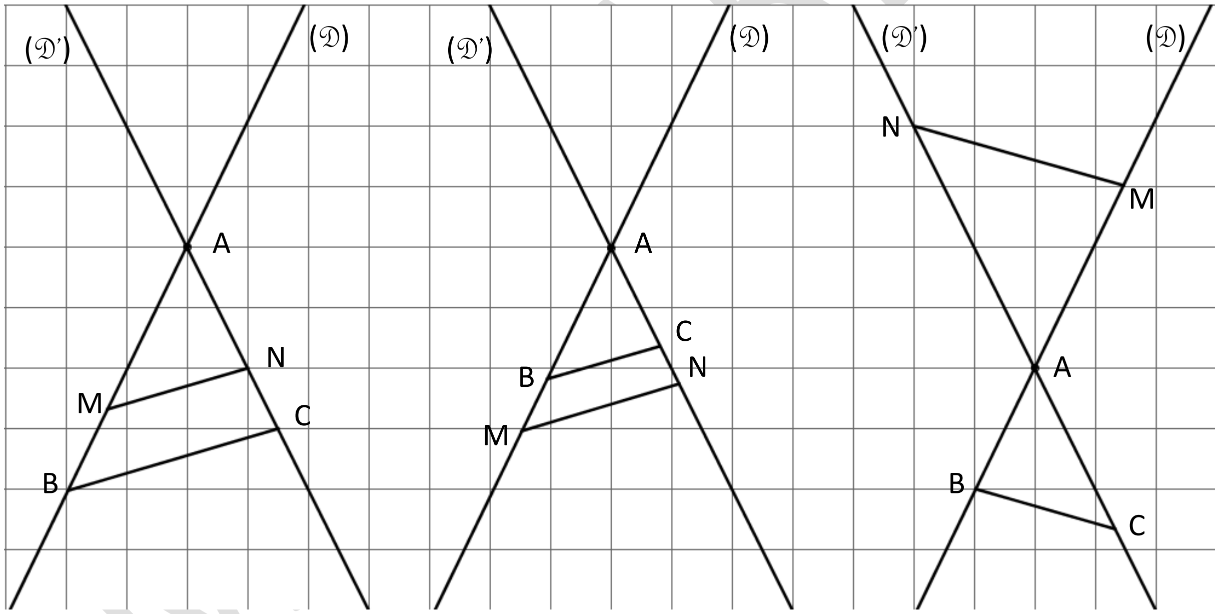
- $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$
- $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
- $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

IX. Théorème de Thalès

► Théorème direct

- Soient deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sécantes en A.
- Soient B et M deux points de $(\mathcal{D})$, distincts de A.
- Soient C et N deux points de $(\mathcal{D}')$, distincts de A.
- Les points A, B et M sont dans le même ordre que les points A, C et N.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



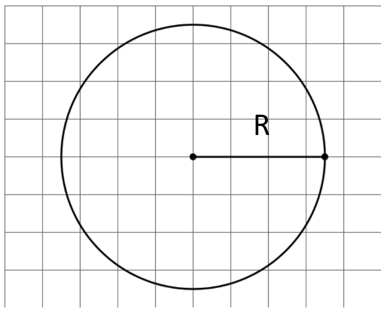
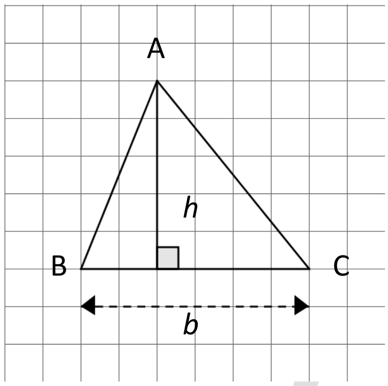
► Réciproque

- Soient deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sécantes en A.
- Soient B et M deux points de $(\mathcal{D})$, distincts de A.
- Soient C et N deux points de $(\mathcal{D}')$, distincts de A.

Si les points A, B et M d'une part, et les points A, C et N d'autre part sont dans le même ordre et si : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

X. Figures planes : formules relatives aux périmètres et aux aires

Triangle et disque

	Figure	Périmètre $\mathcal{P}$	Aire $\mathcal{A}$
Disque		$\mathcal{P} = 2\pi R$	$\mathcal{A} = \pi R^2$
Triangle		$\mathcal{P} = AB + BC + CA$	$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$

Quadrilatères

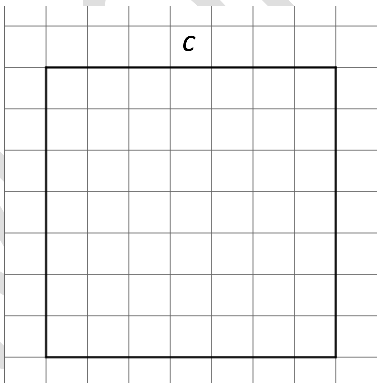
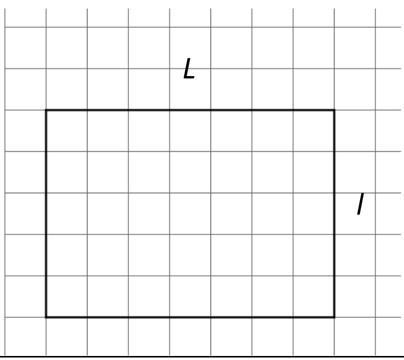
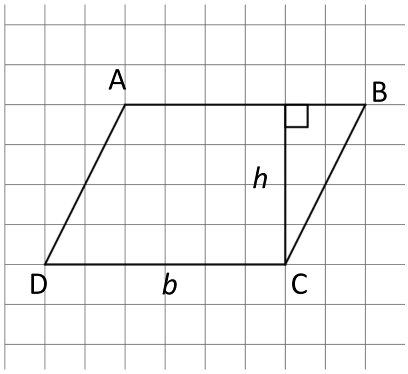
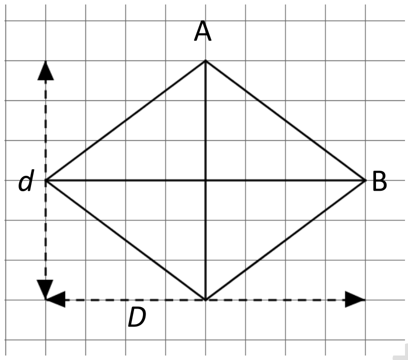
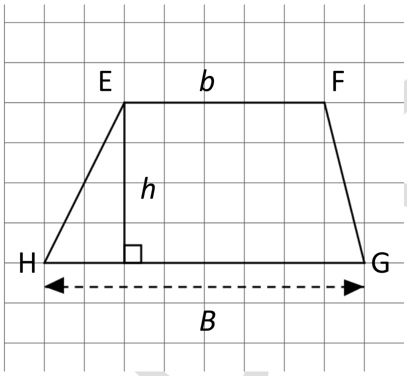
	Figure	Périmètre $\mathcal{P}$	Aire $\mathcal{A}$
Carré		$\mathcal{P} = 4c$	$\mathcal{A} = c^2$
Rectangle		$\mathcal{P} = 2(L + l)$	$\mathcal{A} = L \times l$

	Figure	Périmètre $\mathcal{P}$	Aire $\mathcal{A}$
Parallélo-gramme		$\mathcal{P} = 2(\text{AB} + \text{BC})$	$\mathcal{A} = b \times h$
Losange		$\mathcal{P} = 4\text{AB}$	$\mathcal{A} = \frac{D \times d}{2}$
Trapèze		$\mathcal{P} = \text{EF} + \text{FG} + \text{GH} + \text{HE}$	$\mathcal{A} = \frac{(b+B) \times h}{2}$

Agrandissements et réductions

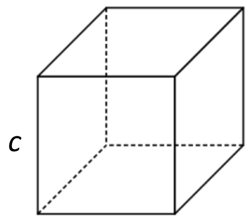
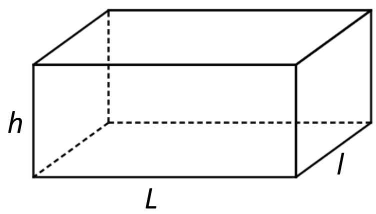
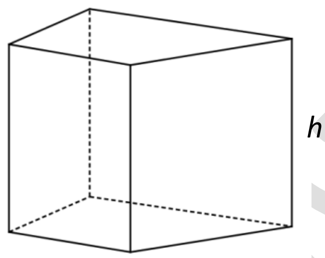
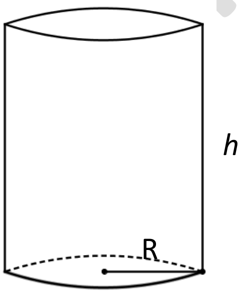
Lorsque toutes les dimensions d'une figure $\mathcal{F}$ sont multipliées par un même nombre k, on obtient une figure $\mathcal{F}$ '.
Si k > 1, $\mathcal{F}$ ' est un agrandissement de $\mathcal{F}$.
Si 0 < k < 1, $\mathcal{F}$ ' est une réduction de $\mathcal{F}$.

- Le périmètre de $\mathcal{F}$ ' se déduit du périmètre de $\mathcal{F}$ en multipliant ce dernier par **k**.
- L'aire de $\mathcal{F}$ ' se déduit de l'aire de $\mathcal{F}$ en multipliant cette dernière par **k²**.

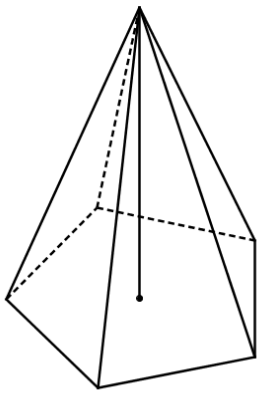
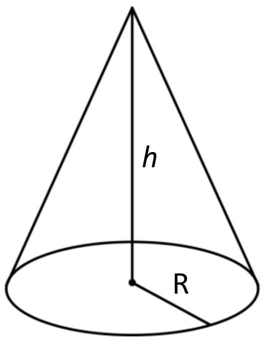
XI. Figures dans l’espace : formules relatives aux aires et aux volumes

Cube, pavé droit, prisme droit et cylindre de révolution

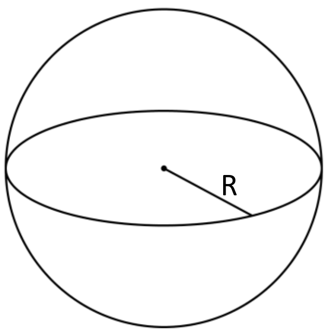
Dans tous ces cas, le volume se calcule **en multipliant l’aire de la base par la hauteur du solide**.

	Figure	**Aire latérale $\mathcal{A}$**	**Volume $\mathcal{V}$**
Cube		$\mathcal{A} = 6c^2$	$\mathcal{V} = c^3$
Pavé droit ou parallé-pipède rectangle		$\mathcal{A} = 2(L \times l + L \times h + l \times h)$ L désignant la longueur l la largeur h la hauteur	$\mathcal{V} = L \times l \times h$
Prisme droit		$\mathcal{A} = p \times h$ P désignant le périmètre de la base et h la hauteur	$\mathcal{V} = B \times h$ B désignant l’aire de la base et h la hauteur
Cylindre de révolution		$\mathcal{A} = 2\pi \times R \times h$ R désignant le rayon de la base et h la hauteur	$\mathcal{V} = \pi \times R^2 \times h$ R désignant le rayon de la base et h la hauteur

Pyramide et cône de révolution

	Figure	Aire $\mathcal{A}$	Volume $\mathcal{V}$
Pyramide		Pas de formule	$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times B \times h$ B désignant l'aire de la base et h la hauteur
Cône de révolution		Pas au programme	$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times B \times h$ B désignant l'aire de la base et h la hauteur, donc : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$

Boule ou sphère

	Figure	Aire $\mathcal{A}$	Volume $\mathcal{V}$
Boule ou sphère		$\mathcal{A} = 4\pi \times R^2$ R désignant le rayon de la boule	$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$ R désignant le rayon de la boule

Agrandissements et réductions

Lorsque toutes les dimensions d'une figure $\mathcal{F}$ sont multipliées par un même nombre k, on obtient une figure $\mathcal{F}'$.
Si $k > 1$, $\mathcal{F}'$ est un agrandissement de $\mathcal{F}$.
Si $0 < k < 1$, $\mathcal{F}'$ est une réduction de $\mathcal{F}$.

- L'aire de $\mathcal{F}'$ se déduit de l'aire de $\mathcal{F}$ en multipliant cette dernière par $\mathbf{k^2}$.
- Le volume de $\mathcal{F}'$ se déduit du volume de $\mathcal{F}$ en multipliant ce dernier par $\mathbf{k^3}$.