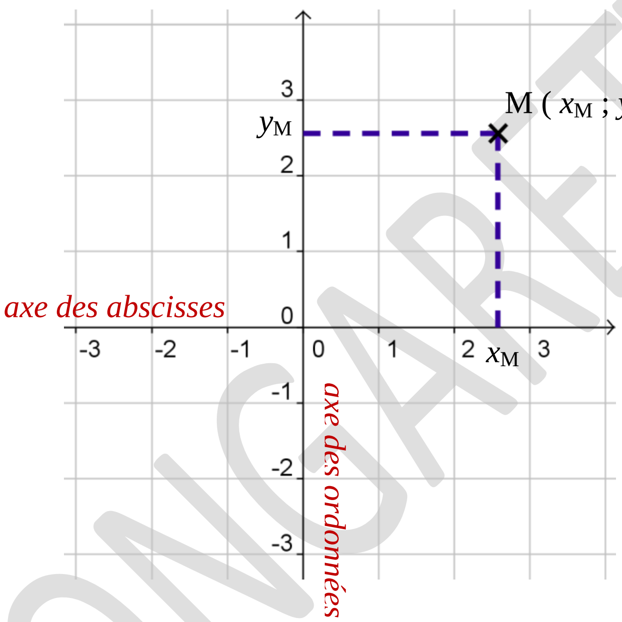
Géométrie analytique – lycée

I. Rappels

1) Vocabulaire

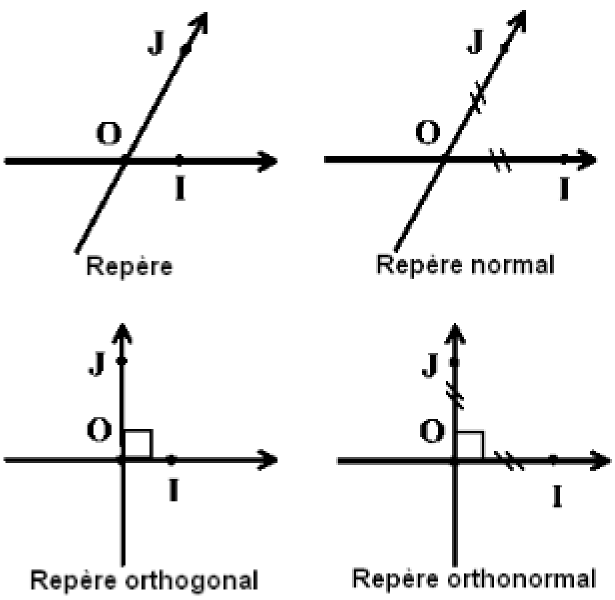
En géométrie analytique, tous les points sont décrits dans un repère par **un couple de coordonnées**:

- l'**abscisse** – qui se lit sur **l'axe horizontal** et qui représente la distance entre le point et l'axe vertical ;
- l'**ordonnée** – qui se lit sur **l'axe vertical** et qui représente la distance entre le point et l'axe horizontal.

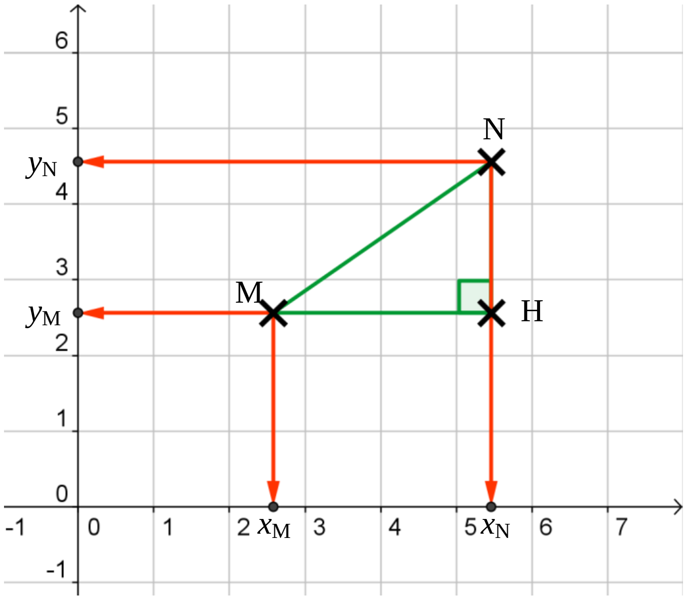


x_M est donc la **distance entre le point M et l'axe vertical** et y_M est la **distance entre le point M et l'axe horizontal.**

2) Autres repères particuliers



II. Distance entre deux points dans un repère orthogonal



On souhaite exprimer la longueur MN en fonction des coordonnées de $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $N(x_N\ ;\ y_N)$:

On construit pour cela le triangle MNH rectangle en H, en remarquant que le point H a la même abscisse que le point N, et la même ordonnée que le point M, soit $H(x_N\ ;\ y_M)$.

On connait les longueurs MH et NH:

MH = *abscisse de H − abscisse de M* $= x_N - x_M$

NH = *ordonnée de N − ordonnée de H* $= y_N - y_M$

Le triangle MNH est un triangle rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$MN^2 = HN^2 + HM^2$$

$$MN^2 = (y_N - y_M)^2 + (x_N - x_M)^2$$

et comme $(y_N - y_M)^2 + (x_N - x_M)^2$ est un nombre positif (car somme de deux carrés), on peut prendre sa racine carrée, si bien que:

$$MN = \sqrt{(y_N - y_M)^2 + (x_N - x_M)^2}$$

CONCLUSION:

Dans un repère orthognormal (O ; OI ; OJ),

si A a pour coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$ et B a pour coordonnées $(x_B\ ;\ y_B)$,

alors: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

exemple commenté

Énoncé (O; OI; OJ) est un repère orthonormal. Soient A(3 ; −5), B(−2 ; −3) et C(0 ; 2). 1. Placer les points A, B et C. 2. Calculer AB , CB et CA. 3.ABC est-il rectangle ? isocèle ? équilatéral ?	**Commentaire**

Solution

1. voir commentaire.
2. AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

   AB = $\sqrt{(-2 - 3)^2 + (-3 - (-5))^2}$

   AB = $\sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

   CA = $\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$

   CA = $\sqrt{(3 - 0)^2 + (-5 - 2)^2}$

   CA = $\sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$

   CB = $\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$

   CB= $\sqrt{(-2 - 0)^2 + (-3 - 2)^2}$

   CB = $\sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$
3. On constate que CB = AB donc ABC est un triangle isocèle en B.

   Vérifions s'il est rectangle:

   D'une part: CA² =($\sqrt{58}$)² = 58

   D'autre part:

   AB² + CB² = ($\sqrt{29}$)² + ($\sqrt{29}$)² = 29 + 29 = 58

   On constate que CA² = AB² + CB²

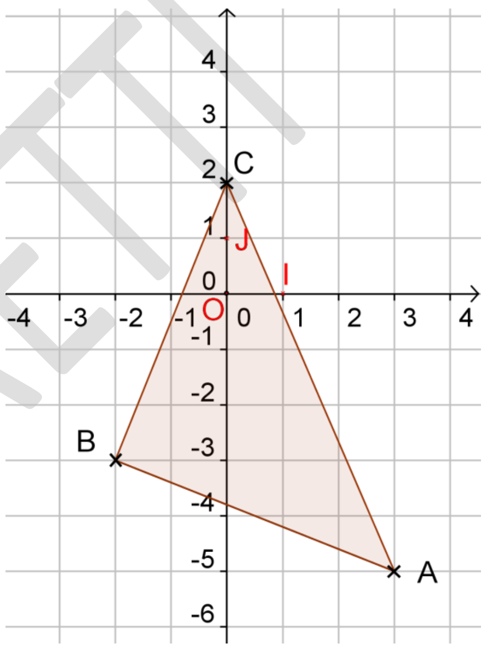
   donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.

   ABC est donc un triangle rectangle et isocèle en B.

Commentaire

1.

Le repère (O ; OI ; OJ) est tel que le point I a pour coordonnées (1 ; 0) et le point J a pour coordonnées (0 ; 1).



2. Pour calculer les longueurs dans le repère orthonormal, on utilise la formule:

MN = $\sqrt{(y_N - y_M)^2 + (x_N - x_M)^2}$

où M(x_M ; y_M) et N(x_N ; y_N).

On fait attention aux signes !

3. Un triangle peut être à la fois isocèle et rectangle, on n'oublie pas de le vérifier !

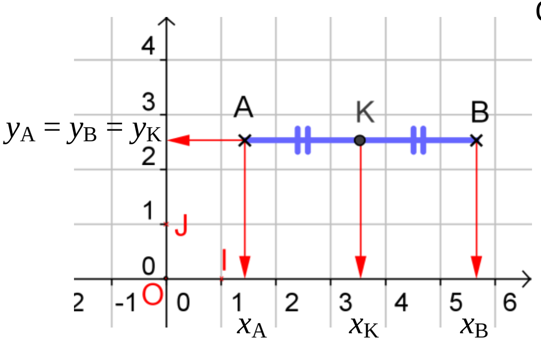
III. Coordonnées du milieu d'un segment

Soient (O ; OI ; OJ) un repère orthonormal et $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts dans ce repère.

Soit K le milieu de [AB]. On note $K(x_K ; y_K)$ les coordonnées du point K.

On souhaite exprimer les coordonnées du point K en fonction de celles des points A et B.

Cas 1: on suppose que les points A et B ont la même ordonnée (ou la même abscisse).



On suppose que $y_A = y_B$ et $x_B \geq x_A$

K est le milieu de [AB] si et seulement si, K ∈[AB] et KA = KB, c'est à dire :

$y_K = y_A = y_B$ et $x_K - x_A = x_B - x_K$

d'où: $2x_K = x_A + x_B$ et $2y_K = y_A + y_B$

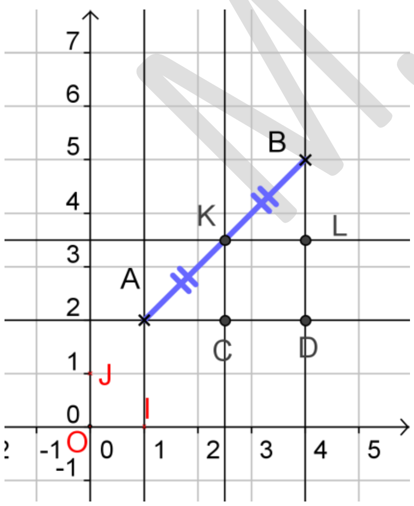
$$\text{ainsi: } x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

La démonstration est analogue si $x_A = x_B$.

Cas 2: on suppose que les points A et B n'ont ni la même abscisse, ni la même ordonnée.

Soit D le point de coordonnées $D(x_B ; y_A)$. Le triangle ABD est rectangle en D.

On trace la parallèle à (BD) passant par K, elle coupe (AD) en C, et on trace la parallèle à (AD) qui passe par K, elle coupe (BD) en L. Ainsi, C et K ont la même abscisse et L et K ont la même ordonnée ; donc: $\mathbf{x_K = x_C}$ et $\mathbf{y_K = y_L}$



On sait que K est le milieu de [AB] et que (KC) est parallèle à (BD), donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on déduit que C est le milieu de [AD]. On se retrouve dans le cas 1 et on peut conclure que:

$$x_K = x_C = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$$

On sait que K est le milieu de [AB] et que (KL) est parallèle à (AD), donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on déduit que L est le milieu de [BD]. On se retrouve dans le cas 1 et on peut conclure que:

$$y_K = y_L = \frac{y_D + y_B}{2} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

CONCLUSION:

Dans un repère orthognormal (O ; OI ; OJ),

A a pour coordonnées (x_A ; y_A) et B a pour coordonnées (x_B ; y_B),

Soit K le milieu du segment [AB] de coordonnées (x_K ; y_K)

alors $$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

exemple commenté

Énoncé

(O; OI; OJ) est un repère orthonormal.

1. Soient A(3 ; 5), B(3 ; −2) et K le milieu de [AB]. Quelles sont les coordonnées du point K ?
2. Soient A(1 ; −2), B(4 ; 4) et K le milieu de [AB]. Quelles sont les coordonnées du point K ?

Solution

1. $x_K = x_A = x_B = 3$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+(-2)}{2} = 1{,}5$

   donc **K (3 ; 1,5).**

2. $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+4}{2} = 2{,}5$

   $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$

   donc **K (2,5 ; 1).**

Commentaire

On applique la formule mise en évidence précédemment.

1. les points A et B ont la même abscisse, on est dans le cas 1.
2. On est dans le cas 2.

Moyen mnémotechnique:

K est le milieu de [AB] donc son abscisse est "le milieu" des abscisses de A et B; et son ordonnée est le "milieu" des ordonnées de A et B.